ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր Том Volume 117 2017 № 2

МАТЕМАТИКА

УДК 519.2

Ф. А. Талалян

Об одной теореме о подрядах расходящихся числовых рядов

(Представлено академиком Н. У. Аракеляном 10/XI 2016)

Ключевые слова: *мера, независимость, последовательность, подряды.*

В связи с разными задачами, касающимися рядов и последовательностей, многими авторами рассматривалась мера на множестве S всех строго возрастающих последовательностей натуральных чисел, вводимая следующим естественным образом (см. [1-4]).

Пусть T есть множество всех точек интервала $(0,1]$, отличных от двоичнорациональных. Каждой точке $t \in T$ сопоставим последовательность $s = \varphi(t) = \{n_i\}$ следующим образом. Возьмем двоичное разложение точки t

$$t = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k(t)}{2^k} = 0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$$

и в качестве $\varphi(t) = \{n_i\}$ возьмем последовательность номеров единиц в этом разложении. Таким образом $\alpha_{n_i}(t) = 1, n = 1, 2, \ldots$.

Для каждого $t \in T$ таких номеров n бесконечно много.

Отображение $\varphi : T \to S$ взаимно однозначное. Для каждого множества $A \subset S$ меру $\mu(A)$ определим, полагая $\mu(A) = m\left(\varphi^{-1}(A)\right)$, где m – мера Лебега. В дальнейшем выражения для почти всех $t \in T$ или для почти всех $s \in S$ понимаются по мере m или, соответственно, по мере μ .

Известен следующий классический результат.

Теорема 1. *Почти все подряды расходящегося числового ряда расходятся.*

В известном нам доказательстве данной теоремы применяется техника бесконечных произведений вероятностных пространств включая теорему Фубини, а также свойства однородных множеств.

В настоящей работе мы доказываем теорему о последовательностях измеримых множеств, эквивалентную теореме 1. При доказательстве однородностью мы не пользуемся. Вместо нее наряду с теоремой Фубини мы пользуемся леммой Бореля – Кантелли о последовательностях независимых событий.

Очевидно, D_n независимы, и так как $m(D_n)=\dfrac{1}{2}$ для всех $n=1,2,\dots$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} m(D_n)=\infty$. Этим свойством обладают и все подпоследовательности D_n. Поэтому в силу второй леммы Бореля – Кантелли ([5], с.69)

$$m\left(\limsup D_{n_i}\right)=1 \text{ для всех } \{n_i\}\in S . \tag{1}$$

Это простое наблюдение играет ключевую роль в доказательстве приводимой ниже теоремы 2.

Отметим, что в (1) через $\limsup\limits_{n\to\infty} E_n$ обозначен верхний предел последовательности E_n. Таким образом

$$\limsup_{n\to\infty} E_n=\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n=k}^{\infty} E_n .$$

Теорема 2. *Пусть* (X,P) *– вероятностное пространство,* E_n *– произвольная последовательность событий в* X, *удовлетворяющая условию*

$$P\left(\limsup_{n\to\infty} E_n\right)=1. \tag{2}$$

Тогда для почти всех $s=\{n_i\}\in S$ *имеет место равенство*

$$P\left(\limsup_{i\to\infty} E_{n_i}\right)=1. \tag{3}$$

Доказательство. Представим каждое $t\in T$ в виде необрывающегося двоичного разложения

$$t=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha_k(t)}{2^k} . \tag{4}$$

Таким образом, для каждого $t\in T$ $\alpha_k(t)=0$ или $\alpha_k(t)=1$, причем $\alpha_k(t)=1$ для бесконечно многих k, следовательно

$$\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k(t)=\infty, t\in T . \tag{5}$$

Пусть χ_E – характеристическая функция множества E. Для каждого $x\in\limsup\limits_{n\to\infty} E_n$ последовательность $\chi_{E_n}(x)$ содержит бесконечно много единиц. Номера этих единиц обозначим $n_i(x)$. Тогда для каждого $x\in\limsup\limits_{n\to\infty} E_n$ выполняется равенство

$$\sum_{n=1}^{\infty}\chi_{E_n}(x)\alpha_n(t)=\infty \text{ при } t\in\limsup_{n\to\infty} E_n . \tag{6}$$

Действительно, имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty}\chi_{E_n}(x)\alpha_n(t)\geq\sum_{i=1}^{\infty}\chi_{E_{n_i(x)}}(x)\alpha_{n_i(x)}(t)=\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_{n_i(x)}(t)=\infty,$$

так как в силу условия $t\in\limsup_{i\to\infty}D_{n_{i}(x)}$ последняя сумма содержит бесконечно много единиц.

В силу (1) и (2) утверждение (6) мы можем сформулировать так: для почти всех $x\in\chi$ имеет место равенство

$$\sum_{n=1}^{\infty}\chi_{E_n}(x)\alpha_n(t)=\infty \text{ для почти всех } t\in(0,1]. \tag{7}$$

Теперь применим теорему Фубини к произведению вероятностных пространств (X,P) и $((0,1],m)$. Получим, что почти для всех $t\in(0,1]$ ряд (7) расходится P-почти всюду по x на X.

Обьясним это чуть подробнее. Пусть

$$Q=\left\{(x,t):\sum_{n=1}^{\infty}\chi_{E_n}(x)\alpha_n(t)=\infty\right\}.$$

Тогда по теореме Фубини

$$\int_0^1\left(\int_X\chi_Q(x,t)\,dx\right)dt=\int_X\left(\int_0^1\chi_Q(x,t)\,dt\right)dx. \tag{8}$$

Из (7) легко следует, что интеграл в правой части (8) равен единице. Тогда

$$\int_0^1\left(\int_X\chi_Q(x,t)\,dx\right)dt=1. \tag{9}$$

Из (9) получаем, что для почти всех $t\in(0,1]$ равенство $\chi_Q(x,t)=1$ выполняется для почти всех $x\in X$, т. е. для почти всех $t\in(0,1]$ выполняется равенство

$$\sum_{n=1}^{\infty}\chi_{E_n}(x)\alpha_n(t)=\infty \tag{10}$$

для почти всех $x\in X$.

Это эквивалентно утверждению теоремы 2, так как для каждого $t\in T$ номера n_i, при которых $\alpha_{n_i}(t)=1$, определяют последовательность $s=\{n_i\}$ и условие (10) переходит в равенство

$$\sum_{i=1}^{\infty}\chi_{E_{n_i}}(x)=\infty,$$

т. е. $x\in\limsup_{i\to\infty}E_{n_i}$, что и требовалось.

Теперь докажем эквивалентность теорем 1 и 2. Импликация $1\Rightarrow 2$ очевидна. Она следует из теоремы Фубини. Докажем обратную импликацию $2\Rightarrow 1$.

Пусть задан расходящийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$. Надо доказать, что для почти всех $t\in T$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n\alpha_n(t)$ расходится. Без ограничения общности можно считать, что $0<a_n 1, n=1,2,\ldots$. Далее легко построить вероятностное

пространство (X, P) и последовательность независимых событий $E_n \subset X$ так, чтобы выполнялись равенства $P(E_n) = a_n, n = 1, 2, \ldots$. В качестве такого (X, P) можно взять, например, произведение счетного числа вероятностных пространств, каждое из которых есть $[0,1]$ с мерой Лебега (см. [6], с. 429).

Тогда, поскольку $\sum_{n=1}^{\infty} P(E_n) = \infty$, согласно второй лемме Бореля – Кантелли имеем

$$P\left(\limsup_{n\to\infty} E_n\right) = 1. \tag{11}$$

В силу теоремы 1 из (11) в силу той же леммы Бореля – Кантелли следует, что для почти всех $s = \{n_i\}$ выполняется равенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\left(E_{n_i}\right) = \sum_{i=1}^{\infty} a_{n_i} = \infty,$$

что и требовалось.

Институт математики НАН РА

Ф. А. Талалян

Об одной теореме о подрядах расходящихся числовых рядов

Приводится новое доказательство одного классического результата, касающегося расходящихся числовых рядов, в котором применяются вероятные соображения, в частности Бореля – Кантелли.

Ֆ. Ա. Թալալյան

Տարամետ թվային ենթաշարքերին վերաբերող մի թեորեմի մասին

Բերվում են տարամետ թվային շարքերին վերաբերող մի դասական արդյունքի նոր ապացույցմ որում կիրառվում են հավանականության դատողություններ, մասնավորապես Բորել –Կանտելլիի լեմման:

F. A. Talalyan

On a Theorem about Subseries of Divergent Numerical Series

A new proof of a classical result concerning divergent numerical series is adduced where probabilistic consideration, in particular the Borel-Cantelli lemmais used

Литература

1. *Auerbach H.* – Studia Math. 1930. N 2. P. 228-230.
2. *Hill J. D.* – Bull. Amer. Math. Soc. 1942. 48. P. 103-108.
3. *Pollard H.* – Bull. Amer. Math. Soc. 1943. 49. P. 730-731.
4. *Pollard H., Buck R. C.* – Bull. Amer. Math. Soc. 1943. 49. P. 924-931.
5. *Lukacs E.* Stochastic Convergence. D. C. Health and Company. 1968.
6. *Hewitt E., Stromberg K.* Real and abstract analysis. Springer-Verlag. 1969.