ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր Том Volume 113 2013 № 4

МЕХАНИКА

УДК 539.3

М. В. Белубекян, В. Г. Гараков

Отражение нормально падающей сдвиговой электроупругой волны от плоской границы раздела двух пьезоактивных сред

(Представлено академиком С. А. Амбарцумяном 28/VI 2013)

Ключевые слова: *электроупругие волны, пьезоэлектрическая среда, отражение, неоднородность.*

В [1] исследованы задачи отражения плоских электроупругих сдвиговых волн от границы полупространства из пьезоактивного материала гексагональной симметрии класса 6 мм. Решения были получены как на основе квазистатического приближения, так и на основе полных уравнений Максвелла (в точной постановке).

Было показано, что в случаях заземленной границы полупространства и равенства нулю нормальной компоненты индукции электрического поля выражения для амплитуды отраженной сдвиговой волны отличаются незначительно. Установлено, что условие равенства нулю нормальной компоненты индукции электрического поля эквивалентно наличию экрана магнитного поля. Отмечено, что точная постановка позволяет исследовать также эффекты, связанные с падением электромагнитной волны на границу полупространства.

В дальнейшем было замечено, что в задачах отражения, когда компоненты электрического поля непрерывны на границе раздела сред, результаты квазистатического приближения и точного решения могут существенно различаться. В настоящей статье указанное различие для наглядности рассматривается на основе исследования отражения нормально падающих (одномерных) волн.

1. В прямоугольной декартовой системе координат (x, y, z) полупространство с индексом (1) занимает область $x < 0$, а полупространство с индексом (2) – область $x > 0$ (рис. 1).

Уравнения чисто сдвиговых одномерных волн, распространяющихся по направлению координаты x, следующие:

$$\frac{\partial \sigma_{13}^{(s)}}{\partial x} = \rho_s \frac{\partial^2 w_s}{\partial t^2}, \qquad (s = 1, 2), \tag{1.1}$$

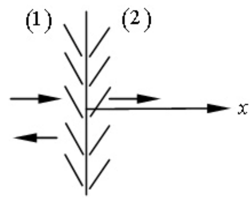

Рис. 1.

где w_s – упругие перемещения в направлении оси z, $\sigma_{13}^{(s)}$ – касательные напряжения, ρ_s – плотности сред. Для пьезоэлектриков класса 6 мм используются известные материальные уравнения [2]

$$\sigma_{13}^{(s)} = C_{44}^{(s)} \frac{\partial w_s}{\partial x} - e_{15}^{(s)} E_1^{(s)}, \quad D_1^{(s)} = \varepsilon_1^{(s)} E_1^{(s)} + e_{15}^{(s)} \frac{\partial w_s}{\partial x}. \tag{1.2}$$

Здесь $E_1^{(s)}$, $D_1^{(s)}$ – компоненты напряженности и индукции электрического поля, $C_{44}^{(s)}$ – модули сдвига, $e_{15}^{(s)}$ – пьезомодули.

Из уравнений электродинамики для сред, обладающих свойствами диэлектрика, в случае, когда решение задачи не зависит от координат y и z, в частности следует

$$\frac{\partial D_1}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial D_1}{\partial x} = 0. \tag{1.3}$$

Отсюда следует, что $D_1 = \text{const}$ и при решении задачи в виде установившихся колебаний (гармонических волн) постоянную следует принять равной нулю.

Тогда из (1.2) получается

$$\varepsilon_1^{(s)} E_1^{(s)} + e_{15}^{(s)} \frac{\partial w_s}{\partial x} = 0, \tag{1.4}$$

т. е. распространение упругих сдвиговых волн будет сопровождаться электрическим полем.

С учетом (1.2), (1.4) уравнение (1.1) приводится к виду

$$C_{ts}^2 \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w_s}{\partial t^2}, \tag{1.5}$$

где

$$C_{ts}^2 = \frac{C_{44}^{(s)}\left(1+\chi_s\right)}{\rho_s}, \quad \chi_s = \frac{\left[e_{15}^{(s)}\right]^2}{C_{44}^{(s)}\varepsilon_s}, \tag{1.6}$$

χ_s есть коэффициент электромеханической связи.

Согласно уравнению (1.5), если на границу раздела $x = 0$ падает нормальная сдвиговая волна

$$w_n = A_1 \exp i\left(\omega t - k_1 x\right), \tag{1.7}$$

то она отражается

$$w_0 = B_1 \exp i\left(\omega t + k_1 x\right) \tag{1.8}$$

и проходит в полупространство $x > 0$

$$w_2 = A_2 \exp i\left(\omega t - k_2 x\right). \tag{1.9}$$

Решения (1.7)–(1.9) удовлетворяют уравнению (1.5) при

$$K_s = C_{ts}^{-1}\omega. \tag{1.10}$$

Требование, чтобы решения (1.7)–(1.9) удовлетворяли граничным условиям

$$w_n + w_0 = w_2, \quad \sigma_{13}^{(1)} = \sigma_{13}^{(2)}, \tag{1.11}$$

приводит к следующим формулам, определяющим амплитуды отраженной и прошедшей волны:

$$A_2 = \frac{2I_1}{I_1 + I_2} A_1, \quad B_1 = \frac{I_1 - I_2}{I_1 + I_2} A_1. \tag{1.12}$$

где

$$I_s = \sqrt{\rho_s C_{44}^{(s)}\left(1 + \chi_s\right)}. \tag{1.13}$$

Отсюда следует, что пьезоэффект приводит к увеличению импеданса среды в $1 + \chi_s$ раз.

2. При исследовании задач по распространению гармонических волн на основе квазистатического приближения для уравнений электростатики вводится функция потенциала φ, удовлетворяющая уравнению

$$\mathrm{rot}\bar{E} = 0. \tag{2.1}$$

Согласно этому приближению материальные уравнения (1.2) заменяются уравнениями [2]

$$\sigma_{13}^{(s)} = C_{44}^{(s)} \frac{\partial w_s}{\partial x} + e_{15}^{(s)} \frac{\partial \varphi_s}{\partial x}, \quad D_1^{(s)} = -\varepsilon_1^{(s)} \frac{\partial \varphi_s}{\partial x} + e_{15}^{(s)} \frac{\partial w_s}{\partial x}, \tag{2.2}$$

а уравнение (1.4) – уравнением

$$\varepsilon_1^{(s)} \frac{\partial^2 \varphi_s}{\partial x^2} - e_{15}^{(s)} \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} = 0, \quad s = 1, 2. \tag{2.3}$$

В результате задача приводится к решению уравнений (1.5) и (2.3). Наличие в (2.3) второй производной относительно функций φ_s приводит к необходимости удовлетворения, наряду с условиями (1.11), дополнительных граничных условий. В частности используются условия вида [2.3]

$$\varphi_1 = \varphi_2, \quad D_1^{(1)} = D_1^{(2)} \quad \text{при} \quad x = 0. \tag{2.4}$$

К решению (1.7)–(1.9) добавляется решение уравнения (2.3)

$$\begin{gathered}
\varphi_n = \frac{e_{15}^{(1)}}{\varepsilon_1^{(1)}} A_1 \exp i\left(\omega t - k_1 x\right), \\
\varphi_0 = \frac{e_{15}^{(1)}}{\varepsilon_1^{(1)}} B_1 \exp i\left(\omega t + k_1 x\right) + C_1 e^{i\omega t}, \\
\varphi_2 = \frac{e_{15}^{(2)}}{\varepsilon_1^{(2)}} A_2 \exp i\left(\omega t - k_2 x\right) + C_2 e^{i\omega t}.
\end{gathered} \tag{2.5}$$

Подстановка (1.7)–(1.9) и (2.5) в граничные условия (1.11) и (2.4), с учетом

$$w_1 = w_n + w_0, \quad \varphi_1 = \varphi_n + \varphi_0 \tag{2.6}$$

приводит к следующей системе уравнений относительно произвольных постоянных B_1, C_1, A_2, C_2:

$$\begin{aligned} &A_1 + B_1 = A_2, \\ &-A_1 + B_1 = -\alpha A_2, \\ &\frac{e_{15}^{(1)}}{\varepsilon_1^{(1)}}\left(A_1 + B_1\right) + C_1 = \frac{e_{15}^{(2)}}{\varepsilon_1^{(2)}} A_2 + C_2, \\ &-A_1 + B_1 = -\beta A_2. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Здесь приняты обозначения

$$\alpha = \frac{I_2}{I_1}, \quad \beta = \frac{\varepsilon_1^{(1)} e_{15}^{(2)} C_{t_1}}{\varepsilon_1^{(2)} e_{15}^{(1)} C_{t_2}}. \tag{2.8}$$

Нетрудно проверить, что система уравнений (2.7) не имеет решения. Следовательно, в этом случае квазистатическое приближение неприемлемо.

Система уравнений (1.5) и (2.3), соответствующая квазистатическому приближению, для задач отражения сдвиговых волн допускает и другие типы граничных условий. Пусть, например, наряду с граничными условиями (1.11) имеют место условия

$$\varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = 0 \ \text{ при } \ x = 0. \tag{2.9}$$

В этом случае после удовлетворения граничным условиям получается система уравнений, из которых амплитуды отраженной $\left(B_1\right)$ и прошедшей $\left(A_3\right)$ волн определяются по формулам (1.12). Получается также, что

$$C_s = -2\frac{e_{15}^{(s)} I_1}{\varepsilon_1^{(s)}\left(I_1 + I_2\right)} A_1, \quad s = 1, 2. \tag{2.10}$$

Здесь, в отличие от точного решения, получается дополнительное электрическое поле $C_s \exp\left(i\omega t\right)$.

Институт механики НАН РА

М. В. Белубекян, В. Г. Гараков

Отражение нормально падающей сдвиговой электроупругой волны от плоской границы раздела двух пьезоактивных сред

Задача отражения нормально падающей электроупругой волны рассматривается как на основе точных уравнений электродинамики, так и в квазистатическом приближении. Установлено, что неоднородная отраженная волна квазистатического приближения не имеет обоснования.

Մ.Վ. Բելուբեկյան, Վ.Գ. Գարակով

Ուղիղ ընկնող սահքի էլեկտրամագնիսաառաձգական ալիքի անդրադարձումը երկու պիեզոակտիվ միջավայրերը բաժանող հարթ եզրից

Ուղիղ ընկնող էլեկտրաառաձգական ալիքի անդրադարձման խնդիրը դիտարկվում է և՝ ճշգրիտ էլեկտրադինամիկայի հավասարումների հիման վրա, և քվազեստատիկ մոտավորությունով: Հաստատված է, որ քվազիստատիկ մոտավորությունով ստացված անդրադարձված անհամասեռ ալիքը հիմնավորում չունի:

M. V. Belubekyan, V. G. Garakov

Reflection of the Normal Falling Shear Electroelastic Wave from the Plane Boundary of the Two Piezoactive Media

The problem of reflection of the normal falling electroelastic wave on the bases of the exact electrodinamical equations and in quazistatic approximation is considered. It is established that the nonhomogeneous reflected wave in quazistatic approximation has no justification.

Литература

1. *Baghdasaryan A., Belubekyan M.* In: Proc. of the 8th Intern. Congress of Jhernal stresses (TS). 2009. Univer. of Illinois of Urbana–Champaign, USA. V.1. P.183–186.
2. *Балакиров М. К., Гилинский И. А.* Волны в пьезокристаллах. Новосибирск. Наука. 1982. 240 с.
3. *Багдасарян Г. Е., Даноян З. Н.* Электромагнитоупругие волны. Ереван. Изд. ЕГУ. 2006. 492 с.