ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր Том Volume 112 2012 № 4

МЕХАНИКА

УДК 539

Академик С. А. Амбарцумян, К. Б. Казарян

Планарные колебания электропроводящей пластинки в поперечном магнитном поле

(Представлено 9/VIII 2012)

Ключевые слова: *планарные колебания, пластинка, теория магнитоупругости.*

Рассматривается задача обобщённого плоского напряжённого состояния электропроводящей пластинки на основе гипотезы магнитоупругости тонких тел. Для того, чтобы обойти необходимость решения уравнений электродинамики в окружающей пластину среде, принимается дополнительное предположение о величинах компонент напряжённости индуцированного магнитного поля на лицевых поверхностях пластинки. Исследуется зависимость частот и коэффициента затухания от величины напряжённости начального поперечного магнитного поля.

1. В большинстве случаев задачи колебаний пластин делятся на две автономные задачи: планарные колебания (обобщённое плоское напряжённое состояние) и изгибные колебания (поперечные колебания) [1-3]. Известно, что в задачах магнитоупругих колебаний пластин существенные эффекты влияния внешнего магнитного поля появляются при исследовании изгибных колебаний [3-7]. Здесь ставится вопрос: возникают ли какие-нибудь эффекты в задачах планарных магнитоупругих колебаний.

Пластина постоянной толщины $2h$ с постоянной электропроводностью σ находится во внешнем магнитном поле с вектором магнитной индукции $\bar{B}_0$, перпендикулярным к срединной плоскости пластинки. В этом случае при допущениях гипотезы магнитоупругости тонких тел задачи планарных и изгибных колебаний разделяются [4].

Согласно [5] система уравнений планарных магнитоупругих колебаний имеет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{1+\nu}{2}\frac{\partial^2 \mathrm{v}}{\partial x\partial y}+\frac{1-\nu^2}{E}\frac{\sigma}{c}B_{03}\psi=$$
$$=\rho\frac{1-\nu^2}{E}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\frac{1-\nu^2}{E}\frac{\sigma}{c^2}B_{03}^2\frac{\partial u}{\partial t},$$
$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{1+\nu}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{1-\nu^2}{E}\frac{\sigma}{c}B_{03}\varphi= \tag{1.1}$$
$$=\rho\frac{1-\nu^2}{E}\frac{\partial^2 \mathrm{v}}{\partial t^2}+\frac{1-\nu^2}{E}\frac{\sigma}{c^2}B_{03}^2\frac{\partial v}{\partial t},$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}-\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t}=0,$$
$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{4\pi\sigma}{c}\psi-\frac{4\pi\sigma}{c^2}B_{03}\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{h_1^+-h_1^-}{2h}, \tag{1.2}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{4\pi\sigma}{c}\varphi-\frac{4\pi\sigma}{c^2}B_{03}\frac{\partial v}{\partial t}=\frac{h_2^+-h_2^-}{2h}.$$

В системе (1.1), (1.2) u,v – тангенциальные перемещения; f – поперечный компонент индуцированного магнитного поля; φ,ψ – тангенциальные компоненты индуцированного электрического поля; E–модуль упругости, ν – коэффициент Пуассона, ρ – плотность материала пластинки; c – электродинамическая постоянная.

Система уравнений (1.1), (1.2) состоит из пяти уравнений относительно пяти искомых функций $u,\mathrm{v},f,\varphi,\psi$. Однако в (1.2) участвуют также неизвестные величины h_1^+,h_1^-,h_2^+,h_2^- – значения тангенциальных компонент индуцированного магнитного поля на лицевых поверхностях пластины $z=\pm h$.

Для нахождения величин h_1^+,h_1^-,h_2^+,h_2^- необходимо также решать уравнения электродинамики для области $|z|>h$. В настоящей работе делается допущение, что этими величинами можно пренебречь:

$$h_1^+-h_1^-\approx 0,\ h_2^+-h_2^-\approx 0. \tag{1.3}$$

В этом случае система уравнений (1.1), (1.2) становится замкнутой и нет необходимости привлечения уравнений электродинамики для внешней среды..

2. Из второго и третьего уравнений системы (1.2) определяются ψ и φ следующим образом (с учётом приближения (1.3)):

$$\psi=-\frac{c}{4\pi\sigma}\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{B_{03}}{c}\frac{\partial u}{\partial t},\ \varphi=\frac{c}{4\pi\sigma}\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{B_{03}}{c}\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial t}. \tag{2.1}$$

После постановки (2.1) в систему (1.1), (1.2) получается следующая система трёх уравнений относительно трёх искомых функций u,v,f :

$$\Delta u+\theta\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial y}\right)-\frac{B_{03}}{4\pi G}\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{1}{c_t^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

$$\Delta \mathrm{v}+\theta\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial y}\right)-\frac{B_{03}}{4\pi G}\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{1}{c_t^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t}-\frac{c^2}{4\pi\sigma}\Delta f+B_{03}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial y}\right)=0.$$

В (2.2) использованы известные обозначения

$$G=\frac{E}{2\left(1+v\right)},\quad \theta=\frac{1+v}{1-v},\quad c_t^2=\frac{G}{\rho}. \tag{2.3}$$

Для системы (2.2) вводится преобразование Ламе [8]

$$u=\frac{\partial\Phi}{\partial x}+\frac{\partial\Psi}{\partial y},\quad \mathrm{v}=\frac{\partial\Phi}{\partial y}-\frac{\partial\Psi}{\partial x}. \tag{2.4}$$

При помощи (2.4) система (2.2) известным способом преобразуется к виду

$$\Delta\Phi-\frac{1}{c_e^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}=\frac{\left(1-v^2\right)}{4\pi E}f,$$

$$\frac{\partial f}{\partial t}-\frac{c^2}{4\pi\sigma}\Delta f+B_{03}\frac{\partial\Delta\Phi}{\partial t}=0, \tag{2.5}$$

$$\Delta\Psi=\frac{1}{c_t^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}.$$

В первом уравнении системы (2.5) принято

$$c_e^2=\frac{E}{\left(1-v^2\right)\rho}. \tag{2.6}$$

Из системы (2.5) следует, что наличие магнитного поля влияет только на продольные волны (система уравнений относительно Φ и f) и не влияет на планарные поперечные волны (уравнение относительно Ψ автономно). Если не выполнять преобразование (2.4), уравнение относительно частоты колебаний получится пятой степени. Система (2.5) показывает, что в общем случае характеристическое уравнение задачи распадается на два уравнения: уравнение третьей степени и уравнение второй степени.

3. Для бесконечной пластинки решение системы уравнений (2.5) относительно Φ и f представляется следующим образом:

$$\Phi=\Phi_0\exp\left[\lambda t-i\left(k_1x+k_2y\right)\right],$$
$$f=f_0\exp\left[\lambda t-i\left(k_1x+k_2y\right)\right]. \tag{3.1}$$

Здесь λ – комплексная частота, k_1,k_2 – волновые числа.

После подстановки (3.1) в (2.5) получается система из двух однородных уравнений относительно произвольных постоянных $\bar{\Phi}_0, f_0$. Из условия равенства детерминанта указанной системы нулю получается уравнение

$$\alpha^3+\varepsilon\alpha^2+\left(1+\gamma^2\right)\alpha+\varepsilon=0. \qquad (3.2)$$

В (3.2) использованы обозначения

$$\alpha=\frac{\lambda}{kc_e},\ \varepsilon=\frac{c^2k}{4\pi\sigma c_e},\ \gamma^2=\frac{\left(1-v^2\right)B_{03}^2}{4\pi E},\ k=\sqrt{k_1^2+k_2^2}. \qquad (3.3)$$

По теореме Гурвица уравнение (3.2) $\left(\varepsilon>0,\gamma^2>0\right)$ имеет либо один отрицательный корень и два комплексных корня с отрицательной действительной частью, либо три отрицательных корня. В случае отсутствия магнитного поля $\left(\gamma^2=0\right)$ корень $\alpha_1=-\varepsilon$ определяет коэффициент затухания возбуждённого электромагнитного поля, а корни $\alpha_{2,3}=\pm i$ – частоты колебаний пластинки в случае идеального проводника $\left(\varepsilon\to 0\right)$

$$\alpha_1=0,\ \alpha_{2,3}=i\sqrt{1+\gamma^2}. \qquad (3.4)$$

4. В случае прямоугольной пластинки $\left(a\times b\right)$ конечных размеров, ввиду наличия второго уравнения системы (2.5), необходимы дополнительные граничные условия на кромках. Пусть прямоугольная пластинка занимает область $o\le x\le\alpha,\ o\le y\le b$. Если считать, что пластинка ни по какой стороне не включена в электрическую цепь, то естественно принять равенство нулю нормальной составляющей плотности электрического тока на кромках пластины:

$$\begin{aligned}&\gamma_x=0 \text{ при } x=0,a,\\ &\gamma_y=0 \text{ при } y=0,b.\end{aligned} \qquad (4.1)$$

Выражения плотности электрического тока в поперечном магнитном поле известны [1]:

$$\gamma_x\sigma\left(\varphi+\frac{B_{03}}{c}\frac{\partial v}{\partial t}\right),\ \gamma_y=\sigma\left(\psi-\frac{B_{03}}{c}\frac{\partial u}{\partial t}\right). \qquad (4.2)$$

С учётом (4.2) и выражений для φ и ψ из (2.1) граничные условия (4.1) приводятся к виду

$$\begin{aligned}&\frac{\partial f}{\partial y}=0 \text{ при } x=0,a,\\ &\frac{\partial f}{\partial x}=0 \text{ при } y=0,b.\end{aligned} \qquad (4.3)$$

Не нарушая общности, вместо условий (3.3) можно использовать следующие граничные условия:

$$f=0 \text{ при } x=0,a;\ y=0,b. \qquad (4.4)$$

Пусть на кромке пластины $x = \text{const}$ вместе с условием $f = 0$ заданы также условия Навье:

$$\sigma_{xx} = 0,\ u_2 = 0. \tag{4.5}$$

При принятых здесь допущениях эти условия приводятся к виду

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0,\ \text{v} = 0,\ f = 0. \tag{4.6}$$

Используя преобразование (2.4) и уравнение (2.5), граничные условия (4.6), в свою очередь, заменяются условиями

$$\Phi = 0,\ f = 0,\ \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0. \tag{4.7}$$

Из (4.7) и системы (2.5) следует, что в этом случае можно использовать метод разделения переменных в виде рядов Фурье

$$\begin{aligned} \Phi &= \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n\left(y\right) e^{i\omega_n t} \sin p_n x, \\ f &= \sum_{n=1}^{\infty} f_n\left(y\right) e^{i\omega_n t} \sin p_n x\ ,\ p_n = n\pi / a. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Можно показать, что при других вариантах граничных условий метод разделения переменных не проходит. В этих случаях необходимо применение приближённых методов типа Галеркина или Ритца.

Если на всех сторонах прямоугольной пластинки $\left(x = 0, a,\ y = 0, b\right)$ заданы условия Навье и пластинка не включена в электрическую цепь, тогда решение задачи можно представить в виде двойных рядов Фурье. Для такой пластинки уравнение, определяющее частоты магнитоупругих колебаний, приводится к виду (3.2), если k заменить выражением

$$k = \left(p_n^2 + \mu_m^2\right)^{1/2},\ \ \mu_m^2 = m\pi / b. \tag{4.9}$$

На основе уравнения (3.2) в таблице приводятся численные расчёты относительно коэффициента затухания $\vartheta = -\operatorname{Re}\left(\lambda\right)$ и безразмерной относительной минимальной частоты $\alpha_0 = \operatorname{Jm}\left(\alpha\right)$ в зависимости от напряжённости внешнего магнитного поля B_{03}. Расчёты приведены для квадратной медной пластинки с параметрами

$a = 10\text{см}$, $E = 1.12 \cdot 10^{12}$ дин/см^2 , $\rho = 8,9$ г/см^3, $\sigma = 5.3 \cdot 10^{17}\ \text{с}^{-1}; \nu = 0,34$.

$B_0\left(10^3\,\text{гаусс}\right)$	$\vartheta\left(\text{с}^{-1}\right)$	α_0
5	0.0024	1.0000
10	0.0474	1.0009
50	0.1374	1.0082
100	1.2410	1.0142
200	3.8927	1.0974

Таким образом, из численных результатов следует, что в отличие от изгибных колебаний пластинки [5] (где влияние магнитного поля существенно) для планарных колебаний внешнее магнитное поле напряжённостью, не превышающей 50000 гаусс, не существенно увеличивает частоту колебаний. С другой стороны, имеет место существенное изменение коэффициента затухания аналогично случаю изгибных колебаний.

Отметим, что относительная частота колебаний для приведённых в таблице значений напряжённости внешнего магнитного поля практически не зависит от длины пластинки a. Коэффициент затухания существенно зависит от длины пластинки и изменяется как $\vartheta \sim 1/a$. В случае, когда пластинка включена в цепь переменного электрического тока

$$j_x = J_0 \sin \omega t \text{ при } x = 0, a, \tag{4.10}$$

граничные условия $f = 0$ необходимо заменить на

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{4\pi J_0}{c} \sin \omega t \text{ при } x = 0, a. \tag{4.11}$$

Уравнение (2.5), в случае условий (4.11), определяет задачу вынужденных колебаний магнитоупругой пластинки.

Институт механики НАН РА

Академик С. А. Амбарцумян, К. Б. Казарян

Планарные колебания электропроводящей пластинки в поперечном магнитном поле

В рамках теории магнитоупругости тонких тел исследована задача планарных колебаний электропроводящей пластинки под действием внешнего поперечного магнитного поля. Изучено влияние интенсивности магнитного поля на частоту колебаний и коэффициент затухания.

Ակադեմիկոս Ս. Ա. Համբարձումյան, Կ. Բ. Ղազարյան

Հաղորդիչ սալի պլանար տատանումները ուղղահայաց մագնիսական դաշտում

Բարակապատ մարմինների մագնիսաառաձգականության տեսության շրջանակներում հետազոտված է էլեկտրահաղորդիչ սալի պլանար տատանումների խնդիրը, երբ սալը գտնվում է արտաքին ուղղահայաց մագնիսական դաշտում: Հետազոտված է մագնիսական դաշտի ազդեցությունը հաճախականությունների և մարման գործակցի վրա:

Academician S. A. Ambartsumian, K. B. Ghazaryan

Planar Vibration of Electroconductive Plate in a Transverse Magnetic Field

In the framework of the magnetoelasticity theory of thin bodies the planar (in-plane) vibration of electroconductive plate is studied under the action of an external transverse magnetic field. The influence of magnetic field intensity on vibration frequency and dumping coefficient is investigated.

Литература

1. *Амбарцумян С. А.* Теория анизотропных пластин. М. Наука. 1987. 360 с.
2. *Агаловян Л. А.* Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. М. Наука. 1997. 414 с.
3. *Vashakmadze T.* The theory of Anizotropic Elastic Plates. Dordrecht /Boston/ London. Kluwer Acad. Publs. and Springer, 2010. 256 p.
4. *Kaliski S.* - Proc. Vibr. Pol. Acad. Sci. 1962. V.3. №4. P. 225-234.
5. *Амбарцумян С. А., Багдасарян Г. Е., Белубекян М. В.* Магнитоупругость тонких оболочек и пластин. М. Наука. 1977. 272 с.
6. *Амбарцумян С. А., Багдасарян Г. Е.* Электропроводящие пластинки и оболочки в магнитном поле. М. Физматлит. 1996. 286 с.
7. *Амбарцумян С. А., Белубекян М. В.* - Вестник инженерной академии Армении. 2006. № 3. С. 394-399.
8. *Новацкий В.* Теория упругости. М. Мир. 1975. 872 с.