ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS
Հատոր Том Volume 112 2012 № 2

Математика

УДК 514. 752.44

В. А. Мирзоян, Г. С. Мачкалян, Р.Э. Чахмахчян

О классификации нормально плоских полупараллельных подмногообразий в евклидовых пространствах

(Представлено академиком В. С. Захаряном 3/X 2011)

Ключевые слова: *полупараллельные подмногообразия, Ric-полусимметрические подмногообразия, эйнштейновы и полуэйнштейновы подмногообразия.*

Подмногообразие M евклидова пространства E_n называется полупараллельным, если полупараллельна его вторая фундаментальная форма α_2. Теории полупараллельных подмногообразий посвящена монография Ю.Г.Лумисте [1]. Полупараллельные подмногообразия входят в класс Ric-полусимметрических подмногообразий, которые исследованы в [2-7]. Настоящая работа посвящена общей локальной классификации нормально плоских полупараллельных подмногообразий в E_n.

Пусть $O(E_n)$ – главное расслоение ортонормреперов $\{x, e_1, ..., e_n\}$ в евклидовом пространстве E_n. Отождествляя точку x с её радиус-вектором, имеем (см. [1, 8])

$$dx = \omega^A e_A,\ de_A = \omega_A^B e_B,\ \omega_B^A + \omega_A^B = 0,\ d\omega^A = \omega^B \wedge \omega_B^A,\ d\omega_A^B = \omega_A^C \wedge \omega_C^B,\ A, B, C = 1, ..., n.$$

Пусть $M - m$-мерное подмногообразие в E_n. Тогда расслоение $O(E_n)$ можно привести к главному расслоению $O(M, E_n)$ адаптированных ортонормреперов $\{x, e_1, ..., e_m, e_{m+1}, ..., e_n\}$, где $x \in M$, $e_i \in T_x(M)$, $i, j, k = 1, ..., m$, $e_\alpha \in T_x^\perp(M)$, $\alpha, \beta = m+1, ..., n$, а $T_x(M)$ и

$T_x^{\perp}(M)$ – касательное и нормальное пространства к M в точке x. По известной схеме (см. [1-3]) будем иметь

$$\omega^{\alpha}=0,\ \ \omega_i^{\alpha}=h_{ij}^{\alpha}\omega^{j},\ \ h_{ij}^{\alpha}=h_{ji}^{\alpha},\ \ \bar{\nabla}h_{ij}^{\alpha}=dh_{ij}^{\alpha}+h_{ij}^{\beta}\omega_{\beta}^{\alpha}-h_{kj}^{\alpha}\,\omega_i^{k}-h_{ik}^{\alpha}\omega_j^{k}=h_{ijk}^{\alpha}\omega^{k},\quad h_{ijk}^{\alpha}=h_{ikj}^{\alpha}$$

Здесь h_{ij}^{α} – компоненты второй фундаментальной формы α_2, ω_i^{j} – 1-формы римановой связности ∇ на M, а ω_{α}^{β} – 1-формы нормальной связности $\nabla^{\perp}$. Компоненты тензоров кривизны R и $R^{\perp}$ этих связностей и тензора Риччи R_1 определяются по формулам

$$R^{j}_{ikl}=-\sum_{\alpha}h^{\alpha}_{i[k}h^{\alpha}_{l]j}\,,\quad R^{\beta}_{\alpha kl}=-\sum_{i}h^{\alpha}_{i[k}h^{\beta}_{l]i}\,,\ \ R_{ik}=R^{l}_{ikl}=\sum_{\alpha}\left(h^{\alpha}_{il}\,h^{\alpha l}_{k}-H^{\alpha}h^{\alpha}_{ik}\right),$$

где $h_k^{\alpha l}=h_{kl}^{\alpha}$, а $H^{\alpha}=h_{ij}^{\alpha}\delta^{ij}$ –компоненты вектора средней кривизны $H=H^{\alpha}e_{\alpha}$ (коэффициент $1/m$ опускаем, поскольку в наших рассуждениях он не играет роли). При $R=0$ подмногообразие называется локально евклидовым, а при $R^{\perp}=0$ – нормально плоским. В дальнейшем через $T_x^{(0)}$, T'_x, $T_x^{(1)}$ будем обозначать, соответственно, пространства дефектности, относительной дефектности и кодефектности подмногообразия M в точке x (см. [2, 3, 9]). Определение полуэйнштейнова пространства можно найти в [2].

Пусть подмногообразие M является нормально плоским, т.е. $R^{\beta}_{\alpha ij}=0$. Тогда все матрицы $\left\|h_{ij}^{\alpha}\right\|$ коммутируют, и в силу этого в некотором ортонормрепере все они могут быть одновременно приведены к диагональному виду $\left\|\lambda_i^{\alpha}\delta_{ij}\right\|$. Подставляя в (1.2), получим $R_{ik}=\rho_i\,\delta_{ik}$, $\rho_i=\sum_{\alpha}\left[\left(\lambda_i^{\alpha}\right)^2-H^{\alpha}\lambda_i^{\alpha}\right]$. Нормальные векторы $n_i=\lambda_i^{\alpha}\,e_{\alpha}$ называются *главными векторами кривизны* (г.в.к.) нормально плоского подмногообразия в E_n. Легко видеть, что $H=n_1+\ldots+n_m$. Если $<\,,\,>$ – скалярное произведение в E_n, то $\rho_i=<n_i\,,n_i>-<H,n_i>$.

Известно, что если вектор $n_i\neq 0$, то $e_i\in T_x^{(0)}$ тогда и только тогда, когда n_i ортогонален всем остальным г.в.к. и его кратность равна единице. Напомним, что ненулевой однократный г.в.к., ортогональный всем остальным г.в.к., называется *сингулярным*. Ненулевые г.в.к., отличные от сингулярных, называются *регулярными* [7].

Пусть в каждой точке x нормально плоское m-мерное подмногообразие M в E_n имеет q различных г.в.к. $n_1,\ldots,n_q$ с кратностями $p_1,\ldots,p_q$ соответственно, $p_1+\ldots+p_q=m$.

Через $F_x^{(\varphi)}$ $(\varphi = 1,...,q)$ обозначим p_φ-мерное подпространство касательного пространства $T_x(M)$, на котором каждая матрица $\left\|\lambda_i^\alpha \delta_{ij}\right\|$ имеет только одно собственное значение кратности p_φ. Это собственное значение мы будем обозначать через $\lambda_{(\varphi)}^\alpha$. Именно в указанном выше смысле будем говорить, что $F_x^{(\varphi)}$ является собственным подпространством, соответствующим г.в.к. n_φ. Подпространства $F_x^{(\varphi)}$ являются инвариантными подпространствами матриц $\left\|h_{ij}^\alpha\right\|$ и, следовательно, матрицы $\left\|R_{ik}\right\|$. В дальнейшем будем предполагать, что в некоторой области на M подпространства $F_x^{(\varphi)}$ имеют постоянные размерности, и через $F^{(\varphi)}$ обозначать соответствующее распределение. Справедливо разложение в прямую сумму: $T_x(M) = F_x^{(1)} + ... + F_x^{(q)}$. Важнейшие свойства подпространств $F_x^{(\varphi)}$ и их связь с $T_x^{(0)}$ и $T_x^{(1)}$ получены в [7].

Пусть M является m-мерным нормально плоским подмногообразием в E_n. Для того, чтобы M было Ric-полусимметрическим, необходимо и достаточно, чтобы его г.в.к. n_i удовлетворяли условию $\left\langle n_i - n_j, n_i + n_j - H\right\rangle \cdot \left\langle n_i, n_j\right\rangle = 0$ [1,2]. Отсюда следует, что множество ненулевых г.в.к. нормально плоского Ric-полусимметрического подмногообразия разбивается на группы, обладающие следующими свойствами: 1) если векторы n_i и n_j $(i \neq j)$ принадлежат одной и той же группе, то они удовлетворяют условию $\left\langle n_i - n_j, n_i + n_j - H\right\rangle = 0$; 2) если векторы n_i и n_j принадлежат разным группам, то они ортогональны и не удовлетворяют условию $\left\langle n_i - n_j, n_i + n_j - H\right\rangle = 0$. Множество всех сингулярных г.в.к. Ric- полусимметрического подмногообразия M обозначим через $W^{(0)}$. Будем считать также, что $W^{(0)}$ содержит нулевой г.в.к., если такой имеется. Регулярные г.в.к. разбиваются на группы, содержащие не менее двух векторов или один вектор, имеющий кратность. Эти группы будем обозначать через $W^{(1)},...,W^{(t)}$. Из свойства 1) следует, что собственные значения тензора Риччи, соответствующие векторам одной и той же группы, равны между собой, а разным группам соответствуют разные собственные значения тензора Риччи.

Пусть M является m-мерным нормально плоским Ric-полусимметрическим подмногообразием индекса дефектности $\mu = \dim T_x^{(0)}$ в E_n ($n - m \geq 2$) и в каждой точке $x \in M$ имеет две группы $W^{(1)}$ и $W^{(2)}$ регулярных г.в.к. (что не будет умалять общности рассуждений). Пусть в $W^{(1)}$ и $W^{(2)}$ имеются по q_1 и q_2 вектора соответственно: $n_1, ..., n_{q_1} \in W^{(1)}$, $n_{q_1+1}, ..., n_{q_1+q_2} \in W^{(2)}$. Как мы знаем, векторы, принадлежащие разным группам, ортогональны. Пусть $T_x^{W^{(1)}} = F_x^{(1)} + \cdots + F_x^{(q_1)}$, $T_x^{W^{(2)}} = F_x^{(q_1+1)} + \cdots + F_x^{(q_1+q_2)}$. Наша цель – доказать, что в случае, когда кратности векторов $n_1, ..., n_{q_1}$, $n_{q_1+1}, ..., n_{q_1+q_2}$ больше единицы, распределения $T^{W^{(1)}}$, $T^{W^{(2)}}$ параллельны друг относительно друга в римановой связности на M.

Обозначим кратности этих векторов через $p_1, ..., p_{q_1}, p_{q_1+1,} ..., p_{q_1+q_2}$ соответственно и будем считать, что все они больше единицы. Адаптированный к M ортонормрепер $\{x, e_1, \ldots, e_m, e_{m+1}, \ldots, e_n\}$ можно выбрать так, чтобы в каждой точке $x \in M$ $e_{i_\varphi} \in F_x^{(\varphi)}$, $e_{i_u} \in F_x^{(u)}$, $e_r \in T_x^{(0)}$, $e_\alpha \in T_x^\perp(M)$, где индексы принимают следующие значения:

$$\varphi, \psi, \chi = 1, \cdots, q_1, \quad u, v = 1, \cdots, q_2, \quad i_\varphi, j_\varphi = p_1 + ... + p_{\varphi-1} + 1, ..., p_1 + ... + p_{\varphi-1} + p_\varphi,$$

$$r_u, s_u = p_1 + ... + p_{q_1} + p_{q_1+1} + ... + p_{q_1+u-1} + 1, ..., p_1 + ... + p_{q_1} + p_{q_1+1} + ... + p_{q_1+u-1} + p_{q_1+u},$$

$$r, s = p_1 + ... + p_{q_1+q_2} + 1, ..., m, \quad \alpha, \beta = m+1, \ldots, n, \quad i, j, k = 1, \ldots, m.$$

Поскольку нормальная связность подмногообразия M плоская, то нормальные к M векторные поля e_α можно выбрать так, чтобы они были параллельны в нормальном расслоении, что равносильно условию $\omega_\beta^\alpha = 0$. Тогда $\omega^\alpha = 0$, $\omega_i^\alpha = \lambda_i^\alpha \omega^i$ и, кроме того,

$$d\lambda_i^\alpha \delta_{ij} + \left(\lambda_j^\alpha - \lambda_i^\alpha\right) \omega_j^i = h_{ijk}^\alpha \omega^k. \tag{1}$$

С учетом принятых обозначений имеем $\omega_r^\alpha = 0$, если $\lambda_r^\alpha = 0$.

Пусть в (1) $i = i_\varphi$, $j = j_\varphi$ ($i_\varphi \neq j_\varphi$). Тогда левая часть равна нулю и, следовательно, $h_{i_\varphi j_\varphi k}^\alpha = 0$. Аналогичным образом, если $i = r_u$, $j = s_u$ ($r_u \neq s_u$), то $h_{r_u s_u k}^\alpha = 0$. Полагая в (1) $i = j = i_\varphi$, а затем $i = j = j_\varphi$, $j_\varphi \neq i_\varphi$, получим $h_{i_\varphi i_\varphi i_\varphi}^\alpha = 0$, $h_{i_\varphi i_\varphi k_\psi}^\alpha = h_{j_\varphi j_\varphi k_\psi}^\alpha, \varphi \neq \psi$, $h_{i_\varphi i_\varphi r_u}^\alpha = h_{j_\varphi j_\varphi r_u}^\alpha$, $h_{i_\varphi i_\varphi r}^\alpha = h_{j_\varphi j_\varphi r}^\alpha$. Аналогично $h_{r_u r_u r_u}^\alpha = 0$, $h_{r_u r_u s_v}^\alpha = h_{s_u s_u s_v}^\alpha, u \neq v$, $h_{r_u r_u j_\varphi}^\alpha = h_{s_u s_u j_\varphi}^\alpha$, $h_{r_u r_u r}^\alpha = h_{s_u s_u r}^\alpha$. Следовательно,

$$d\lambda_{(\varphi)}^\alpha = \sum_{\psi \neq \varphi} h_{i_\varphi i_\varphi k_\psi}^\alpha \omega^{k_\psi} + \sum_u h_{i_\varphi i_\varphi r_u}^\alpha \omega^{r_u} + h_{i_\varphi i_\varphi r}^\alpha \omega^r, \tag{2}$$

$$d\lambda^{\alpha}_{(u)} = \sum_{v\neq u} h^{\alpha}_{r_u r_u s_v}\omega^{s_v} + \sum_{\varphi} h^{\alpha}_{r_u r_u i_\varphi}\omega^{i_\varphi} + h^{\alpha}_{r_u r_u r}\omega^{r}. \tag{3}$$

Если в (1) положить $i = r,\ j = j_\varphi$, а затем $i = r,\ j = s_v$, то будем иметь

$$(\lambda^{\alpha}_{(\varphi)} - \lambda^{\alpha}_{r})\omega^{r}_{j_\varphi} = h^{\alpha}_{rj_\varphi j_\varphi}\omega^{j_\varphi} + \sum_{\psi\neq\varphi} h^{\alpha}_{rj_\varphi k_\psi}\omega^{k_\psi} + \sum_{u} h^{\alpha}_{rj_\varphi r_u}\omega^{r_u} + h^{\alpha}_{rrj_\varphi}\omega^{r} + h^{\alpha}_{rj_\varphi t}\omega^{t},\quad t\neq r, \tag{4}$$

$$(\lambda^{\alpha}_{(v)} - \lambda^{\alpha}_{r})\omega^{r}_{s_v} = h^{\alpha}_{rs_v s_v}\omega^{s_v} + \sum_{u\neq v} h^{\alpha}_{rs_v r_u}\omega^{r_u} + \sum_{u} h^{\alpha}_{rs_v j_\varphi}\omega^{j_\varphi} + h^{\alpha}_{rrs_v}\omega^{r} + h^{\alpha}_{rs_v t}\omega^{t}.\quad t\neq r. \tag{5}$$

Умножая равенство (4) на $\lambda^{\alpha}_{s_v}$, а (5) на $\lambda^{\alpha}_{i_\psi}$ и суммируя по α, получим

$$\sum_{\alpha}\lambda^{\alpha}_{s_v}h^{\alpha}_{rj_\varphi j_\varphi} = 0,\quad \sum_{\alpha}\lambda^{\alpha}_{s_v}h^{\alpha}_{rj_\varphi k_\psi} = 0,\ \varphi\neq\psi,\quad \sum_{\alpha}\lambda^{\alpha}_{s_v}h^{\alpha}_{rj_\varphi r_u} = 0,\ \sum_{\alpha}\lambda^{\alpha}_{s_v}h^{\alpha}_{rrj\varphi} = 0,\ \sum_{\alpha}\lambda^{\alpha}_{s_v}h^{\alpha}_{rtj\varphi} = 0,\ t\neq r,$$

$$\sum_{\alpha}\lambda^{\alpha}_{i_\psi}h^{\alpha}_{rs_v j_\varphi} = 0,\quad \sum_{\alpha}\lambda^{\alpha}_{i_\psi}h^{\alpha}_{rs_v r_u} = 0,\ u\neq v,\quad \sum_{\alpha}\lambda^{\alpha}_{i_\psi}h^{\alpha}_{rs_v s_v} = 0,\quad \sum_{\alpha}\lambda^{\alpha}_{(\psi)}h^{\alpha}_{rrs_v} = 0,\ \sum_{\alpha}\lambda^{\alpha}_{(\psi)}h^{\alpha}_{rts_v} = 0,\ t\neq r.$$

Эти соотношения получены на основании того, что г.в.к., принадлежащие разным группам, ортогональны, т.е. $\sum_{\alpha}\lambda^{\alpha}_{i_\varphi}\lambda^{\alpha}_{r_u} = 0$. Тогда $\sum_{\alpha}\left(\lambda^{\alpha}_{i_\varphi}d\lambda^{\alpha}_{r_u} + \lambda^{\alpha}_{r_u}d\lambda^{\alpha}_{i_\varphi}\right) = 0$ и, подставляя сюда соотношения (2) и (3), получим

$$\sum_{\alpha}\lambda^{\alpha}_{r_u}h^{\alpha}_{i_\varphi i_\varphi s_u} = 0,\quad \sum_{\alpha}\lambda^{\alpha}_{i_\varphi}h^{\alpha}_{r_u r_u i_\varphi} = 0,\quad \sum_{\alpha}\left(\lambda^{\alpha}_{i_\varphi}h^{\alpha}_{r_u r_u s_v} + \lambda^{\alpha}_{r_u}h^{\alpha}_{i_\varphi i_\varphi s_v}\right) = 0,\ u\neq v,$$

$$\sum_{\alpha}\left(\lambda^{\alpha}_{i_\varphi}h^{\alpha}_{r_u r_u k_\psi} + \lambda^{\alpha}_{r_u}h^{\alpha}_{i_\varphi i_\varphi k_\psi}\right) = 0,\ \varphi\neq\psi,\quad \sum_{\alpha}\left(\lambda^{\alpha}_{i_\varphi}h^{\alpha}_{r_u r_u r} + \lambda^{\alpha}_{r_u}h^{\alpha}_{i_\varphi i_\varphi r}\right) = 0.$$

Если в (1) положить $i = i_\varphi,\ j = j_\psi,\ \varphi\neq\psi$, а затем $i = r_u,\ j = s_v,\ u\neq v$, то будем иметь

$$\left(\lambda^{\alpha}_{j_\psi} - \lambda^{\alpha}_{i_\varphi}\right)\omega^{i_\varphi}_{j_\psi} = h^{\alpha}_{i_\varphi j_\psi i_\varphi}\omega^{i_\varphi} + h^{\alpha}_{i_\varphi j_\psi j_\psi}\omega^{j_\psi} + \sum_{\chi\neq\varphi,\psi} h^{\alpha}_{i_\varphi j_\psi k_\chi}\omega^{k_\chi} + \sum_{v} h^{\alpha}_{i_\varphi j_\psi s_v}\omega^{s_v} + h^{\alpha}_{i_\varphi j_\psi r}\omega^{r}, \tag{6}$$

$$\left(\lambda^{\alpha}_{s_v} - \lambda^{\alpha}_{r_u}\right)\omega^{r_u}_{s_v} = h^{\alpha}_{r_u s_v r_u}\omega^{r_u} + h^{\alpha}_{r_u s_v s_v}\omega^{s_v} + \sum_{l\neq u,v} h^{\alpha}_{r_u s_v s_l}\omega^{s_l} + \sum_{\psi} h^{\alpha}_{r_u s_v j_\psi}\omega^{j_\psi} + h^{\alpha}_{r_u s_v r}\omega^{r}. \tag{7}$$

При $i = i_\varphi,\ j = r_u$ из (1) имеем

$$\left(\lambda^{\alpha}_{i_\varphi} - \lambda^{\alpha}_{r_u}\right)\omega^{r_u}_{i_\varphi} = h^{\alpha}_{i_\varphi r_u i_\varphi}\omega^{i_\varphi} + h^{\alpha}_{i_\varphi r_u r_u}\omega^{r_u} + \sum_{\psi\neq\varphi} h^{\alpha}_{i_\varphi r_u j_\psi}\omega^{j_\psi} + \sum_{v\neq u} h^{\alpha}_{i_\varphi r_u s_v}\omega^{s_v} + h^{\alpha}_{r_u i_\varphi r}\omega^{r}. \tag{8}$$

Умножая (6) на $\lambda^{\alpha}_{s_v}$, а (7) на $\lambda^{\alpha}_{j_\chi}$ и суммируя по α, получим следующие соотношения:

$$\sum_{\alpha}\lambda^{\alpha}_{s_v}h^{\alpha}_{i_\varphi j_\psi i_\varphi} = 0,\quad \sum_{\alpha}\lambda^{\alpha}_{s_v}h^{\alpha}_{i_\varphi j_\psi j_\psi} = 0,\quad \sum_{\alpha}\lambda^{\alpha}_{s_v}h^{\alpha}_{i_\varphi j_\psi k_\chi} = 0,\ \chi\neq\varphi,\chi\neq\psi,\varphi\neq\psi,\ \sum_{\alpha}\lambda^{\alpha}_{s_v}h^{\alpha}_{i_\varphi j_\psi s_u} = 0,$$

$\varphi\neq\psi$,

$$\sum_\alpha \lambda^\alpha_{j_\chi} h^\alpha_{r_u s_v j_\psi} = 0, \quad \sum_\alpha \lambda^\alpha_{j_\chi} h^\alpha_{r_u s_v r_u} = 0, \quad \sum_\alpha \lambda^\alpha_{j_\chi} h^\alpha_{r_u s_v s_l} = 0,\ l \neq u, l \neq v, u \neq v, \quad \sum_\alpha \lambda^\alpha_{j_\chi} h^\alpha_{r_u s_v s_v} = 0, \quad u \neq v.$$

Умножая (8) на $\lambda^\alpha_{i_\varphi}$, а затем на $\lambda^\alpha_{r_u}$ и суммируя по α, получим

$$\begin{aligned}\sum_\alpha \left(\lambda^\alpha_{i_\varphi}\right)^2 \omega^{r_u}_{i_\varphi} = \sum_\alpha \lambda^\alpha_{i_\varphi} h^\alpha_{i_\varphi r_u i_\varphi} \omega^{i_\varphi} + \sum_\alpha \lambda^\alpha_{i_\varphi} h^\alpha_{i_\varphi r_u r_u} \omega^{r_u} + \sum_{\psi \neq \varphi} \sum_\alpha \lambda^\alpha_{i_\varphi} h^\alpha_{i_\varphi r_u j_\psi} \omega^{j_\psi} + \\ + \sum_{v \neq u} \sum_\alpha \lambda^\alpha_{i_\varphi} h^\alpha_{i_\varphi r_u s_v} \omega^{s_v} + \sum_\alpha \lambda^\alpha_{i_\varphi} h^\alpha_{r_u i_\varphi r} \omega^r,\end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned}-\sum_\alpha \left(\lambda^\alpha_{r_u}\right)^2 \omega^{r_u}_{i_\varphi} = \sum_\alpha \lambda^\alpha_{r_u} h^\alpha_{i_\varphi r_u i_\varphi} \omega^{i_\varphi} + \sum_\alpha \lambda^\alpha_{r_u} h^\alpha_{i_\varphi r_u r_u} \omega^{r_u} + \sum_{\psi \neq \varphi} \sum_\alpha \lambda^\alpha_{r_u} h^\alpha_{i_\varphi r_u j_\psi} \omega^{j_\psi} + \\ + \sum_{v \neq u} \sum_\alpha \lambda^\alpha_{r_u} h^\alpha_{i_\varphi r_u s_v} \omega^{s_v} + \sum_\alpha \lambda^\alpha_{r_u} h^\alpha_{r_u i_\varphi r} \omega^r.\end{aligned} \tag{10}$$

Если в (9) и (10) учесть соотношения

$$\sum_\alpha \lambda^\alpha_{r_u} h^\alpha_{i_\varphi r_u j_\psi} = 0, \ \sum_\alpha \lambda^\alpha_{r_u} h^\alpha_{r r_u j_\varphi} = 0, \ \sum_\alpha \lambda^\alpha_{r_u} h^\alpha_{i_\varphi i_\varphi r_u} = 0, \ \sum_\alpha \lambda^\alpha_{i_\varphi} h^\alpha_{r_u s_v j_\varphi} = 0, \ \sum_\alpha \lambda^\alpha_{i_\varphi} h^\alpha_{r_u r_u i_\varphi} = 0, \ \sum_\alpha \lambda^\alpha_{i_\varphi} h^\alpha_{r_u i_\varphi r} = 0,$$

где $\varphi \neq \psi$, $\quad u \neq v$, $\quad$ то окончательно получим

$$\sum_\alpha \left(\lambda^\alpha_{i_\varphi}\right)^2 \omega^{r_u}_{i_\varphi} = \sum_\alpha \lambda^\alpha_{i_\varphi} h^\alpha_{i_\varphi r_u i_\varphi} \omega^{i_\varphi} + \sum_{\psi \neq \varphi} \sum_\alpha \lambda^\alpha_{i_\varphi} h^\alpha_{i_\varphi r_u j_\psi} \omega^{j_\psi},$$

$$-\sum_\alpha \left(\lambda^\alpha_{r_u}\right)^2 \omega^{r_u}_{i_\varphi} = \sum_\alpha \lambda^\alpha_{r_u} h^\alpha_{i_\varphi r_u r_u} \omega^{r_u} + \sum_{v \neq u} \sum_\alpha \lambda^\alpha_{r_u} h^\alpha_{i_\varphi r_u s_v} \omega^{s_v}.$$

Из этих равенств следует,что

$$\sum_\alpha \lambda^\alpha_{i_\varphi} h^\alpha_{i_\varphi r_u i_\varphi} = 0, \ \sum_\alpha \lambda^\alpha_{i_\varphi} h^\alpha_{i_\varphi r_u j_\psi} = 0, \ \sum_\alpha \lambda^\alpha_{r_u} h^\alpha_{i_\varphi r_u r_u} = 0, \ \sum_\alpha \lambda^\alpha_{r_u} h^\alpha_{i_\varphi r_u s_v} = 0, \ \ \omega^{r_u}_{i_\varphi} = 0. \tag{11}$$

На основании последнего равенства системы (11) заключаем, что распределения $T^{W^{(1)}}$, $T^{W^{(2)}}$ параллельны друг относительно друга на подмногообразии M. Поскольку число распределений в наших рассуждениях не играло никакой роли, то справедлива следующая

Теорема 1. *Пусть M является m-мерным нормально плоским Ric-полусимметрическим подмногообразием евклидова пространства E_n ($n-m \geq 2$) и пусть в каждой точке M допускает всего p групп $W^{(1)}$, $W^{(2)}$, ..., $W^{(p)}$ регулярных главных векторов кривизны. Если кратности всех этих векторов больше единицы, то распределения $T^{W^{(1)}}, T^{W^{(2)}}, \cdots, T^{W^{(p)}}$, соответствующие группам $W^{(1)}$, $W^{(2)}$, ..., $W^{(p)}$, параллельны друг относительно друга (но не относительно распределения дефектности $T^{(0)}$) в римановой связности на M.*

Условие полупараллельности нормально плоского подмногообразия в E_n в терминах г.в.к. имеет следующий вид: $\left(n_i - n_j\right)\left\langle n_i, n_j\right\rangle = 0$ для любых двух г.в.к. $n_{i,} n_j$ [1]. Итак, любые два г.в.к нормально плоского полупараллельного подмногообразия равны друг другу или взаимно ортогональны. Следовательно, множество регулярных г.в.к. полупараллельного подмногообразия разбивается на группы $W^{(1)}$, $W^{(2)}$, ..., $W^{(p)}$, где каждая группа состоит из взаимно ортогональных векторов, кратности которых ≥ 2. При доказательстве теоремы 1 главную роль играло условие взаимной ортогональности регулярных г.в.к., а также то, что их кратности были ≥ 2. Поэтому в случае полупараллельного подмногообразия распределения $F^{(\varphi)}$ (см. §1), отвечающие регулярным г.в.к., будут параллельны друг относительно друга (но не относительно $T^{(0)}$). Интегральное многообразие распределения $F^{(\varphi)}$, как известно [1-3], является сферой размерности p_φ. Поскольку сферы как подмногообразия неприводимы, то разложение $T_x(M) = T_x^{(0)} + F_x^{(1)} + \cdots + F_x^{(q)}$, где $q -$ число регулярных г.в.к. (одномерные подпространства $F^{(\varphi)}$, соответствующие сингулярным г.в.к., содержатся в $T_x^{(0)}$), фактически является V-разложением З. Сабо [10]. Продолжая это разложение до соответствующего Z-разложения [10], получим $T_x(M) = Z_x^{(0)} + Z_x^{(1)} + \cdots + Z_x^{(q)}$, где $Z_x^{(\varphi)}$, $\varphi > 0$, является расширением $F_x^{(\varphi)}$ только за счёт $T_x^{(0)}$. Распределения $Z^{(0)}, Z^{(1)}, \cdots, Z^{(q)}$, как известно [10], параллельны на всём подмногообразии M. Что представляют собой их интегральные многообразия, выясним несколько позже.

Нормально плоские полупараллельные подмногообразия были классифицированы и геометрически описаны в терминах скрещенных произведений в [1] и [11]. Однако результаты, полученные в [1] и [11], нельзя считать окончательными, поскольку термин “скрещенное произведение” (т.е. произведение $M_0 \times M_1 \times \cdots \times M_r$, наделённое римановой метрикой $ds_0^2 + f_1^2\, ds_1^2 + \cdots + f_r^2\, ds_r^2$, где $f_k -$знакопостоянные функции на M_0) характеризует внутреннюю геометрию. Подмногообразие необходимо геометрически описывать с точки зрения объемлющего пространства, а не с точки зрения внутренней метрики.

Определение. *Изометрическое погружение* $M = M_1 \times \cdots \times M_r \to E_n$ *произведения римановых многообразий* $M_1, \cdots, M_r$ *в* E_n *называется сплетающимся произведением* *подмногообразий $M_1,\cdots,M_r$, если M неприводимо в E_n как подмногообразие (многообразие и его изометрический образ мы отождествляем).*

Это понятие было введено первым автором в [12]. Там же доказана следующая общая классификационная.

Теорема 2. *В евклидовом пространстве E_n нормально плоское подмногообразие M удовлетворяет условию $R(X,Y)R_1=0$ тогда и только тогда, когда оно является открытой частью одного из следующих подмногообразий: (1) нормально плоского двумерного подмногообразия, (2) нормально плоского эйнштейнова (в частности, риччи-плоского, локально евклидова) подмногообразия, (3) нормально плоского полуэйнштейнова подмногообразия, (4) нормально плоского сплетающегося произведения полуэйнштейновых подмногообразий и риччи-плоского подмногообразия (возможно размерности ноль), (5) прямого произведения перечисленных выше классов подмногообразий.*

Возвратимся теперь к распределениям $Z^{(\varphi)}$ и выясним, что представляют из себя их интегральные многообразия. Поскольку $Z_x^{(\varphi)}$ является расширением подпространства $F_x^{(\varphi)}$ только за счёт $T_x^{(0)}$, то $Z_x^{(\varphi)}$ можно представить в виде следующей прямой суммы: $Z_x^{(\varphi)}=F_x^{(\varphi)}+T_x^{(0,\varphi)}$, где $T_x^{(0,\varphi)}-$некоторое подпространство в $T_x^{(0)}$. Если $T_x^{(0,\varphi)}$ является нулевым, то распределение $Z^{(\varphi)}$ совпадает с $F^{(\varphi)}$ и его интегральное многообразие является сферой. Пусть $T_x^{(0,\varphi)}$ не является нулевым и пусть $M^{(\varphi)}$ обозначает интегральное многообразие распределения $Z^{(\varphi)}$. Если $M^{(\varphi)}$ будем рассматривать как подмногообразие в E_n, то $T_x^{(0,\varphi)}$ будет его пространством дефектности, а $F_x^{(\varphi)}-$ пространством кодефектности в точке x. Распределение $F^{(\varphi)}$ интегрируемо, а его интегральное многообразие является сферой, т.е. вполне омбилическим подмногообразием в $M^{(\varphi)}$. Это значит, что для $M^{(\varphi)}$ выполняются условия следующей теоремы.

Теорема 3. *([2]). Пусть $M-$ n-мерное риманово многообразие с постоянным индексом дефектности $\mu\neq 0$ и интегрируемым распределением кодефектности $T^{(1)}$, $\dim T^{(1)}=n-\mu\geq 2$. Если его интегральное многообразие $M^{(1)}$ является вполне омбилическим в M, то: 1) M локально изометрично либо цилиндру над $M^{(1)}$, либо цилиндру с $(\mu-1)$-мерным образующим над конусом, построенным над $M^{(1)}$, 2) M полуэйнштейново либо* *риччи-плоское тогда и только тогда, когда $M^{(1)}$ эйнштейново; более того, если $M^{(1)}$ эйнштейново с константой $\varphi \le 0$, то M полуэйнштейново, если же $\varphi > 0$, то M либо полуэйнштейново, либо риччи-плоское.*

На основании этой теоремы заключаем, что $M^{(\varphi)}$, как подмногообразие в E_n, локально изометрично или цилиндру над сферой, или конусу над сферой, или цилиндру над конусом, построенным над сферой. Далее, рассуждая как и в [12], приходим к следующей теореме.

Теорема 4. *В евклидовом пространстве E_n нормально плоское подмногообразие M является полупараллельным тогда и только тогда, когда оно представляет собой открытую часть одного из следующих подмногообразий: (1) нормально плоского локально евклидова подмногообразия, (2) сферы, (3) конуса над сферой (с точностью до изометрии), (4) нормально плоского сплетающегося произведения полуэйнштеновых подмногообразий, каждое из которых является конусом над сферой* (*с точностью до изометрии*)*, и локально евклидова подмногообразия (возможно размерности ноль), (6) прямого произведения перечисленных выше классов подмногообразий.*

Государственный инженерный университет Армении

В. А. Мирзоян, Г. С. Мачкалян, Р.Э. Чахмахчян

О классификации нормально плоских полупараллельных подмногообразий в евклидовых пространствах

Доказано, что в евклидовом пространстве E_n нормально плоское подмногообразие M является полупараллельным тогда и только тогда, когда оно представляет собой открытую часть одного из следующих подмногообразий: 1) нормально плоского евклидова подмногообразия, 2) сферы, 3) конуса над сферой (с точностью до изометрии), 4) нормально плоского сплетающегося произведения полуэйнштеновых подмногообразий, каждое из которых является конусом над сферой (с точностью до изометрии), и локально евклидова подмногообразия (возможно размерности ноль), 5) прямого произведения перечисленных выше классов подмногообразий.

Վ. Ա.Միրզոյան, Գ. Ս. Մաչկալյան, Ռ. Է. Չախմախչյան

Էվկլիդեսյան տարածություններում նորմալ հարթ կիսազուգահեռ ենթաբազմաձևությունների դասակարգման մասին

Ապացուցված է, որ E_n էվկլիդեսյան տարածությունում նորմալ հարթ M ենթաբազմաձևությունը հանդիսանում է կիսազուգահեռ այն, և միայն այն դեպքում, երբ նա հանդիսանում է հետևյալ ենթաբազմաձևություններից մեկի բաց մաս՝ 1) նորմալ հարթ լոկալ էվկլիդեսյան ենթաբազմաձևության, 2) սֆերայի, 3) սֆերայի վրա կառուցված կոնի (իզոմետրիայի ճշտությամբ), 4) ենթաբազմաձևությունների նորմալ հարթ միահյուսված արտադրյալի, որոնցից յուրաքանչյուրը հանդիսանում է կոն կառուցված սֆերայի վրա (իզոմետրիայի ճշտությամբ), և լոկալ էվկլիդեսյան ենթաբազմաձևության (հնարավոր է զրոյական չափողականության), 5) վերը թվարկված ենթաբազմաձևությունների դասերի ուղիղ արտադրյալի:

V. A. Mirzoyan, G. S. Machkalyan, R. E. Chakhmakhchyan

On Classification of Normally Flat Semiparallel Submanifolds in Euclidean spaces

It has been proved that a normally flat submanifold M in Euclidean space E_n is semiparallel if and only if it is an open part of one of the following submanifolds: 1) normally flat locally Euclidean submanifold, 2) sphere, 3) cone over sphere (up to the isometry), 4) normally flat interlacing product of semi-Einstein submanifolds, each of which is cone over sphere (up to the isometry), and locally Euclidean submanifold (may be of zero dimension), 5) direct product of the above enumerated classes of submanifolds.

Литература

1. *Lumiste Ü.* Semiparallel submanifolds in space forms. New York: Springer. 2009.
2. *Мирзоян В.А.* – Изв. РАН. Сер. матем. 2003. Т.67. N 5. С. 107-124.
3. *Мирзоян В.А.*- Матем. сб. 2006. Т. 197. N 7. С. 47-76.
4. *Мирзоян В.А.*- Матем. сб. 2008. Т. 199. N 3. С. 69-94.
5. *Мирзоян В.А., Мачкалян Г.С.*- ДНАН РА. 2009. Т. 109. N 2.С. 119-125.
6. *Мирзоян В.А., Мачкалян Г.С.* - Вестник ГИУА(Политехник). 2011. Т. 3. N 1.С. 3-7.
7. *Мирзоян В.А.*- Изв. РАН. Сер. матем. 2011. Т. 75. N 6. С. 47-78.

8. *Chern S.S., Chen W.H., Lam K.S.* Lectures on differential geometry. Singapore. World Scientific. 2000.
9. *Chern S.S., Kuiper N.*- Ann. of. Math. 1952. V. 56. N 3. P. 422-430.
10. *Szabo Z.I.* - J. Differential Geom. 1982. V. 17. N 4. P. 531-582.
11. *Dillen F., Nölker S.*- J. Reine Angew. Math. 1993. V. 435. P. 33-63.
12. *Mirzoyan V.A.*- ДНАН РА 2012. Т 112. N1. С. 19-29.