

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

УДК 539.3.01

П. В. Галпчян

Напряженное состояние составного цилиндра с секторным поперечным сечением при действии касательных нагрузок

(Представлено академиком С.А. Амбарцумяном 29/XII 2007)

Ключевые слова: *составной цилиндр, упругость, напряженное состояние, особенность, касательная нагрузка, поступательное движение*

Антиплоская деформация составного цилиндра с поперечным сечением в виде кругового сектора, вызванная продольным сдвигом по направлению образующих, рассмотрена в [1,2]. В этих работах показано, что в случае, когда вызывающие деформацию касательные силы, действующие на цилиндрической поверхности цилиндра $r = a$, составляют уравновешенную систему, а радиальные грани свободны, задача решается методом Фурье.

1. Рассмотрим случай, когда кроме сил, приложенных на цилиндрической поверхности $r = a$, действуют силы и на радиальных гранях по направлению образующих.

В цилиндрической системе координат r, φ, z составные части цилиндра занимают области, ограниченные координатными поверхностями $\varphi = -\beta$, $\varphi = 0$, $r = a$ и $\varphi = 0$, $\varphi = \alpha$, $r = a$ соответственно. Причем $0 < (\alpha, \beta) < 2\pi$, $0 < \alpha + \beta < 2\pi$, $a > 0$, ось z — образующая цилиндров.

Из сказанного ясно, что контакт составных частей происходит по общей грани, лежащей на плоскости $\varphi = 0$.

Здесь и далее все величины, относящиеся к области $-\beta \leq \varphi \leq 0$, будем обозначать индексом $i = 1$, а к области $0 \leq \varphi \leq \alpha$ — индексом $i = 2$.

Как было сказано выше, для составного цилиндра, когда грани $\varphi = -\beta$ и $\varphi = \alpha$ свободны от воздействия внешних нагрузок, а на цилиндрической поверхности $r = a$ приложена уравновешенная система сил, действующих

по направлению образующих, методом разделения переменных получается точное решение антиплоской деформации.

При введении функции напряжений $F_i(r, \varphi)$ задача сводится к решению уравнения Лапласа [1,2]

$$\Delta F_i(r, \varphi) = 0 \quad (1.1)$$

с граничными условиями

$$F_1(r, \alpha) = 0, \quad F_2(r, -\beta) = 0, \quad (1.2)$$

$$\frac{1}{a} \frac{\partial F_1(a, \varphi)}{\partial \varphi} = \tau f_1(\varphi), \quad \frac{1}{a} \frac{\partial F_2(a, \varphi)}{\partial \varphi} = \tau f_2(\varphi) \quad (1.3)$$

и условиями на линии раздела смежных областей $\varphi = 0$

$$\frac{\partial F_1(r, 0)}{\partial \varphi} = \mu \frac{\partial F_2(r, 0)}{\partial \varphi}, \quad F_1(r, 0) = F_2(r, 0), \quad (1.4)$$

где

$$\mu = \frac{G_1}{G_2}, \quad \tau = \frac{1}{2}(G_1 + G_2),$$

G_i — модули сдвига, $f_i(\varphi)$ — произвольные функции, удовлетворяющие условиям равновесия системы внешних сил [1].

Методом разделения переменных для задачи (1.1), (1.2), (1.4) получено следующее общее решение:

$$F_i(r, \varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} r^{\lambda_k} (A_i^{(k)} \cos \lambda_k \varphi + B_i^{(k)} \sin \lambda_k \varphi),$$

где λ_k — собственные значения, являющиеся корнями уравнения

$$\sin \lambda \beta \cos \lambda \alpha + \mu \sin \lambda \alpha \cos \lambda \beta = 0. \quad (1.5)$$

2. Решение рассматриваемой задачи ищем в виде суммы

$$\Phi_i(r, \varphi) = F_i(r, \varphi) + V_i(r, \varphi), \quad (2.1)$$

где $F_i(r, \varphi)$ — решение задачи (1.1)-(1.4), а $V_i(r, \varphi)$ удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta V_i(r, \varphi) = 0, \quad (2.2)$$

условиям непрерывности напряжения $\tau_{\varphi z}^{(i)}$ и перемещения $u_z^{(i)}$ на линии раздела смежных областей $\varphi = 0$

$$V_1(r, 0) = V_2(r, 0), \quad \frac{\partial V_1(r, 0)}{\partial \varphi} = \mu \frac{\partial V_2(r, 0)}{\partial \varphi}, \quad (2.3)$$

условиям

$$\tau_{\varphi z}^{(1)}(r, \alpha) = -\frac{\partial V_1(r, \alpha)}{\partial r} = \tau \eta \left(\frac{r}{a} \right); \quad (2.4)$$

$$\tau_{\varphi z}^{(2)}(r, -\beta) = -\frac{\partial V_2(r, -\beta)}{\partial r} = \tau \eta \left(\frac{r}{a} \right),$$

которые соответствуют тому, что на радиальных гранях $\varphi = \alpha$ и $\varphi = -\beta$ приложены нагрузки $\left(\eta \left(\frac{r}{a} \right) > 0 \right.$ произвольная непрерывная функция), и, наконец, условиям

$$\frac{1}{a} \frac{\partial V_i(a, \varphi)}{\partial \varphi} = 0, \quad (2.5)$$

отражающим тот факт, что силы, действующие на цилиндрической поверхности $r = a$, выражаются только первыми слагаемыми функции $\Phi_i(r, \varphi)$.

Легко убедиться, что в силу линейности и однородности уравнения Лапласа сумма решений F_i и V_i также будет решением уравнения

$$\Delta \Phi_i(r, \varphi) = 0 \quad (2.6)$$

с условиями

$$\Phi_1(r, 0) = \Phi_2(r, 0), \quad \frac{\partial \Phi_1(r, 0)}{\partial \varphi} = \mu \frac{\partial \Phi_2(r, 0)}{\partial \varphi}, \quad (2.7)$$

$$\frac{1}{a} \frac{\partial \Phi_1(a, \varphi)}{\partial \varphi} = \tau f_1(\varphi), \quad \frac{1}{a} \frac{\partial \Phi_2(a, \varphi)}{\partial \varphi} = \tau f_2(\varphi), \quad (2.8)$$

$$-\frac{\partial \Phi_1(r, \alpha)}{\partial r} = \tau \eta \left(\frac{r}{a} \right), \quad -\frac{\partial \Phi_2(r, -\beta)}{\partial r} = \tau \eta \left(\frac{r}{a} \right), \quad (2.9)$$

аналогично рассмотренным в пунктах 1, 2.

Подобная задача для определения стационарного температурного поля в составном круговом секторе рассмотрена в работе [3].

3. Введем новую независимую переменную $\xi = r/a$ вместо r . Когда r изменяется в промежутке $0 \leq r \leq a$, то $0 \leq \xi \leq 1$.

Будем искать решение $V_i(r, \varphi)$ задачи (2.2)-(2.5) в виде рядов

$$V_1(\xi a, \varphi) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \xi^{\beta_n} a^{\beta_n} (A_n \cos \beta_n \varphi + B_n \sin \beta_n \varphi), \quad (3.1)$$

$$V_2(\xi a, \varphi) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \xi^{\beta_n} a^{\beta_n} (C_n \cos \beta_n \varphi + D_n \sin \beta_n \varphi),$$

где $A_0, A_n, B_n, C_0, C_n, D_n$ — пока неопределенные коэффициенты, а показатели степеней β_n также подлежат определению.

Подстановкой (3.1) в уравнение (2.2) нетрудно проверить, что оно удовлетворяется тождественно.

Перепишем условия (2.3) и (2.4) в новых переменных

$$V_1(\xi a, 0) = V_2(\xi a, 0), \quad \frac{\partial V_1(\xi a, 0)}{\partial \varphi} = \mu \frac{\partial V_2(\xi a, 0)}{\partial \varphi}, \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial V_1(\xi a, \alpha)}{a \partial \xi} = -\tau \eta(\xi), \quad \frac{\partial V_2(\xi a, -\beta)}{a \partial \xi} = -\tau \eta(\xi). \quad (3.3)$$

Интегрируя (3.3), получаем

$$\begin{aligned} V_1(\xi a, \alpha) &= -a\tau \eta_0(\xi) - a\tau C, \\ V_2(\xi a, -\beta) &= -a\tau \eta_0(\xi) - a\tau C, \end{aligned} \quad (3.4)$$

где $\eta_0(\xi)$ есть неопределенный интеграл от данной функции $\eta(\xi)$, а C — произвольная постоянная. Из (3.1) и (3.4) будем иметь

$$\begin{aligned} A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \xi^{\beta_n} a^{\beta_n} (A_n \cos \beta_n \alpha + B_n \sin \beta_n \alpha) &= -a\tau \eta_0(\xi), \\ C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \xi^{\beta_n} a^{\beta_n} (C_n \cos \beta_n \beta - D_n \sin \beta_n \beta) &= -a\tau \eta_0(\xi), \end{aligned} \quad (3.5)$$

где положено $C = 0$.

Представим функцию $\eta_0(\xi)$ в виде степенного ряда

$$\eta_0(\xi) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \xi^{\beta_n}. \quad (3.6)$$

Согласно (3.1) и (3.2), получаем:

$$\begin{aligned} A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \xi^{\beta_n} a^{\beta_n} A_n &= C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \xi^{\beta_n} a^{\beta_n} C_n, \\ \sum_{n=1}^{\infty} \xi^{\beta_n} a^{\beta_n} \beta_n B_n &= \mu \sum_{n=1}^{\infty} \xi^{\beta_n} a^{\beta_n} \beta_n D_n. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях ξ в левых и правых частях равенств (3.7), получаем:

$$A_0 = C_0, \quad A_n = C_n, \quad B_n = \mu D_n. \quad (3.8)$$

Подставив затем (3.6) в (3.5) и повторив ту же процедуру, получим:

$$\begin{aligned} A_0 &= -a\tau a_0, \quad A_n \cos \beta_n \alpha + B_n \sin \beta_n \alpha = -\tau a_n a^{-\beta_n+1}, \\ C_0 &= -a\tau a_0, \quad C_n \cos \beta_n \beta - D_n \sin \beta_n \beta = -\tau a_n a^{-\beta_n+1}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Из (3.8) и (3.9) получаем систему двух неоднородных алгебраических уравнений первой степени для определения коэффициентов C_n и D_n :

$$\begin{aligned} C_n \cos \beta_n \alpha + \mu D_n \sin \beta_n \alpha &= -\tau a_n a^{-\beta_n+1}, \\ C_n \cos \beta_n \beta - D_n \sin \beta_n \beta &= -\tau a_n a^{-\beta_n+1}. \end{aligned}$$

По теореме Крамера эта система имеет одно определенное решение, если определитель системы $\Delta(\beta_n)$ отличен от нуля:

$$\Delta(\beta_n) = -(\cos \beta_n \alpha \sin \beta_n \beta + \mu \sin \beta_n \alpha \cos \beta_n \beta) \neq 0.$$

Отсюда ясно, что показатели степеней β_n в (3.6) не должны быть корнями уравнения (1.5).

Подставив найденные коэффициенты в (3.1), окончательно получим:

$$\begin{aligned} V_1(\xi a, \varphi) = & -\tau a a_0 + \tau a \sum_{n=1}^{\infty} \xi^{\beta_n} \frac{a_n}{\Delta(\beta_n)} [\mu \cos \beta_n \beta \sin \beta_n \varphi + \\ & + \sin \beta_n \beta \cos \beta_n \varphi + \mu \sin \beta_n (\alpha - \varphi)], \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned} V_2(\xi a, \varphi) = & -\tau a a_0 + \tau a \sum_{n=1}^{\infty} \xi^{\beta_n} \frac{a_n}{\Delta(\beta_n)} [\mu \sin \beta_n \alpha \cos \beta_n \varphi - \\ & - \cos \beta_n \alpha \sin \beta_n \varphi + \sin \beta_n (\beta + \varphi)]. \end{aligned}$$

Для составляющего напряжений $\tau_{\varphi z}^{(i)}$ будем иметь:

$$\begin{aligned} \tau_{\varphi z}^{(1)}(r, \varphi) = & -\frac{\partial F_1(r, \varphi)}{\partial r} + \tau \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^{\beta_n-1} \frac{\beta_n a_n}{\Delta(\beta_n)} [\mu \sin \beta_n (\varphi - \alpha) - \\ & - \mu \cos \beta_n \beta \sin \beta_n \varphi - \sin \beta_n \beta \cos \beta_n \varphi], \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} \tau_{\varphi z}^{(2)}(r, \varphi) = & -\frac{\partial F_2(r, \varphi)}{\partial r} + \tau \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^{\beta_n-1} \frac{\beta_n a_n}{\Delta(\beta_n)} [\cos \beta_n \alpha \sin \beta_n \varphi - \\ & - \mu \sin \beta_n \alpha \cos \beta_n \varphi - \sin \beta_n (\varphi + \beta)]. \end{aligned}$$

Подобные формулы получаются и для составляющего напряжения $\tau_{zr}^{(i)}$. При $\mu = 1$ отсюда получаются решения, соответствующие однородному цилиндру.

4. Используя решение, построенное в [2] для случая, когда $\beta = 3\alpha$, $\alpha = \pi/4$, рассмотрим решение задачи (2.6)-(2.9), когда на радиальных гранях $\varphi = -\beta$ и $\varphi = \alpha$ приложены определенные нагрузки.

Пусть $\eta_0(\xi) = e_1 \operatorname{tg} \xi$, где $e_1 > 0$ — безразмерная постоянная. Представим $\operatorname{tg} \xi$ в виде степенного ряда

$$\operatorname{tg} \xi = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}(2^{2n} - 1)B_n}{(2n)!} \xi^{2n-1}, \quad (4.1)$$

где B_n — числа Бернулли.

В данном случае ($\beta = 3a$, $\alpha = \pi/4$) собственными значениями являются

$$\nu_{2n-1} = \delta + 4(n-1), \quad \nu_{2n} = 2(2n-1), \quad \rho_{2n-1} = -\delta + 4n,$$

$$\rho_{2n} = 4n, \quad \delta = \frac{2}{\pi} \arccos \frac{\mu-1}{2(\mu+1)},$$

которые не совпадают с $\beta_n = 2n-1$ для неоднородного цилиндра ($\mu \neq 1$).

Случай однородного цилиндра ($\mu = 1$) не описывается принятой функцией $\eta_0(\xi) = e_1 \operatorname{tg} \xi$, а вернее, принятым разложением (4.1). Конечно, это не означает, что с физической точки зрения нельзя на однородный цилиндр приложить соответствующую (4.1) нагрузку. Просто из эмпирических данных известно распределение нагрузки, когда аппроксимируем функцией $\eta(\xi) = e_1 \operatorname{tg}' \xi$, соответствующей разложению (4.1), использованный математический аппарат становится бессильным для описания рассматриваемого механического состояния. Из (2.4) имеем

$$\tau_{\varphi z}^{(1)}(r, \alpha) = \tau_{\varphi z}^{(2)}(r, -\beta) = \tau \eta'_0(\xi) = \tau \eta(\xi) = \tau e_1 \operatorname{tg}' \xi = \tau e_1 \cos^{-2} \xi. \quad (4.2)$$

Из построенных решений (3.10), (3.11) заключаем, что в рассмотренном в этом пункте случае присутствие особенностей составляющих напряжений в кусочно-однородном цилиндре (в полюсе $r = 0$) обусловлено только первыми слагаемыми $\partial F_i(r, \varphi)/\partial r$, выражения которых приводятся в [2]. Часть поля напряжений, возникающая от задачи (2.2)-(2.4) при $\eta_0(\xi) = e_1 \operatorname{tg} \xi$, особенности не дает.

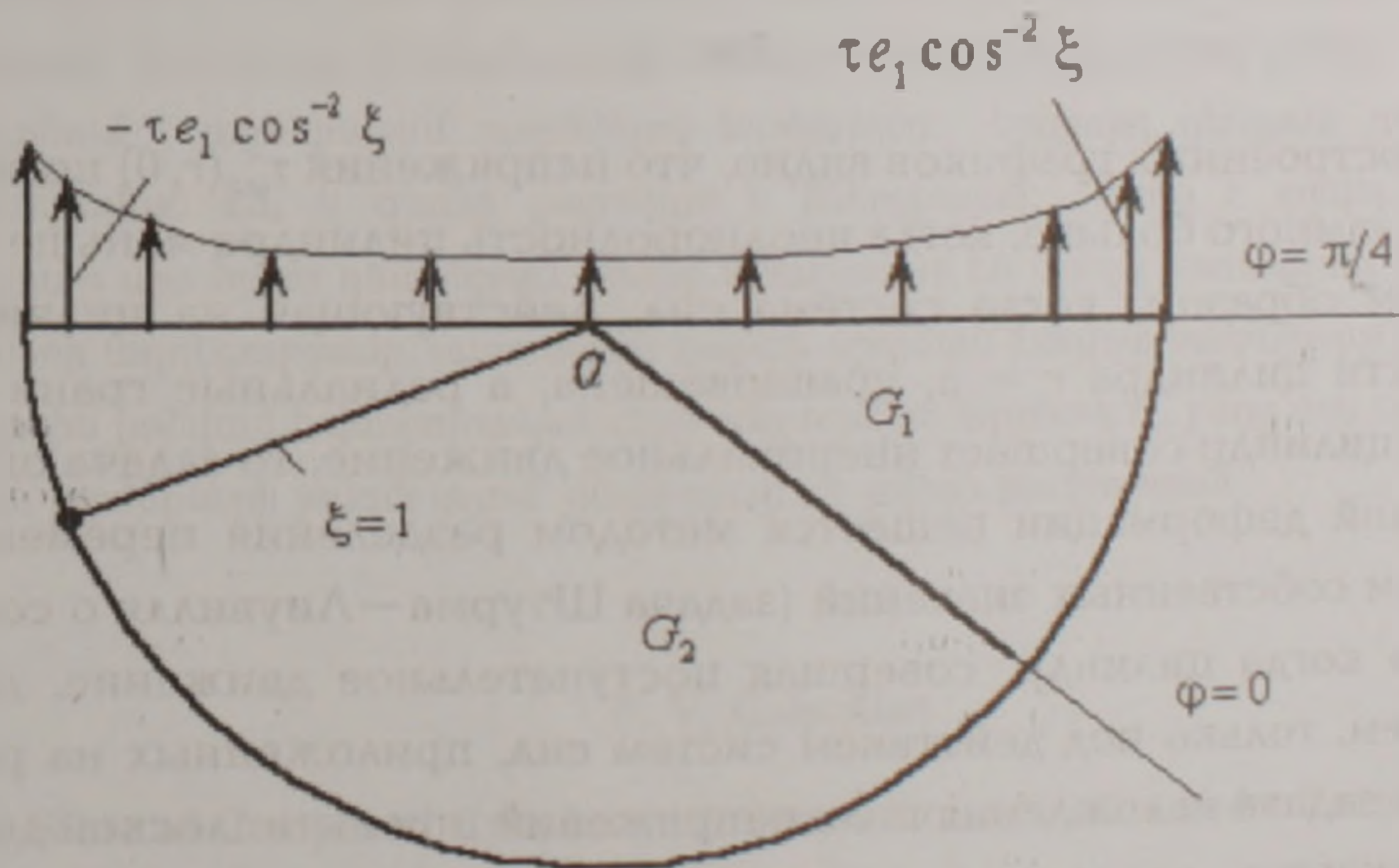


Рис. 1

Характер распределения внешней нагрузки $\tau \eta(\xi)$ на радиальных гранях цилиндра с полукруговым поперечным сечением приведен на рис 1.

На основе результатов, полученных в настоящем пункте, построены графики изменения слагаемого напряжения $\tau_{\varphi z}(r, 0)$ на линии раздела $\varphi = 0$

составных частей, являющегося следствием только нагрузок (4.2). На рис. 2 для трех значений параметра μ приведены графики изменения слагаемого $\tau_{\varphi z}^*(r, 0)$ напряжения $\tau_{\varphi z}$ на линии раздела $\varphi = 0$. Кривая 1 соответствует значению $\mu = 1.236$ ($G_1 = 4.178 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2$, $G_2 = 3.381 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2$), кривая 2 – значению $\mu = 5.759$ ($G_1 = 3.381 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2$, $G_2 = 0.587 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2$), а кривая 3 – значению $\mu = 13.708$ ($G_1 = 8.047 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2$, $G_2 = 0.587 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2$).

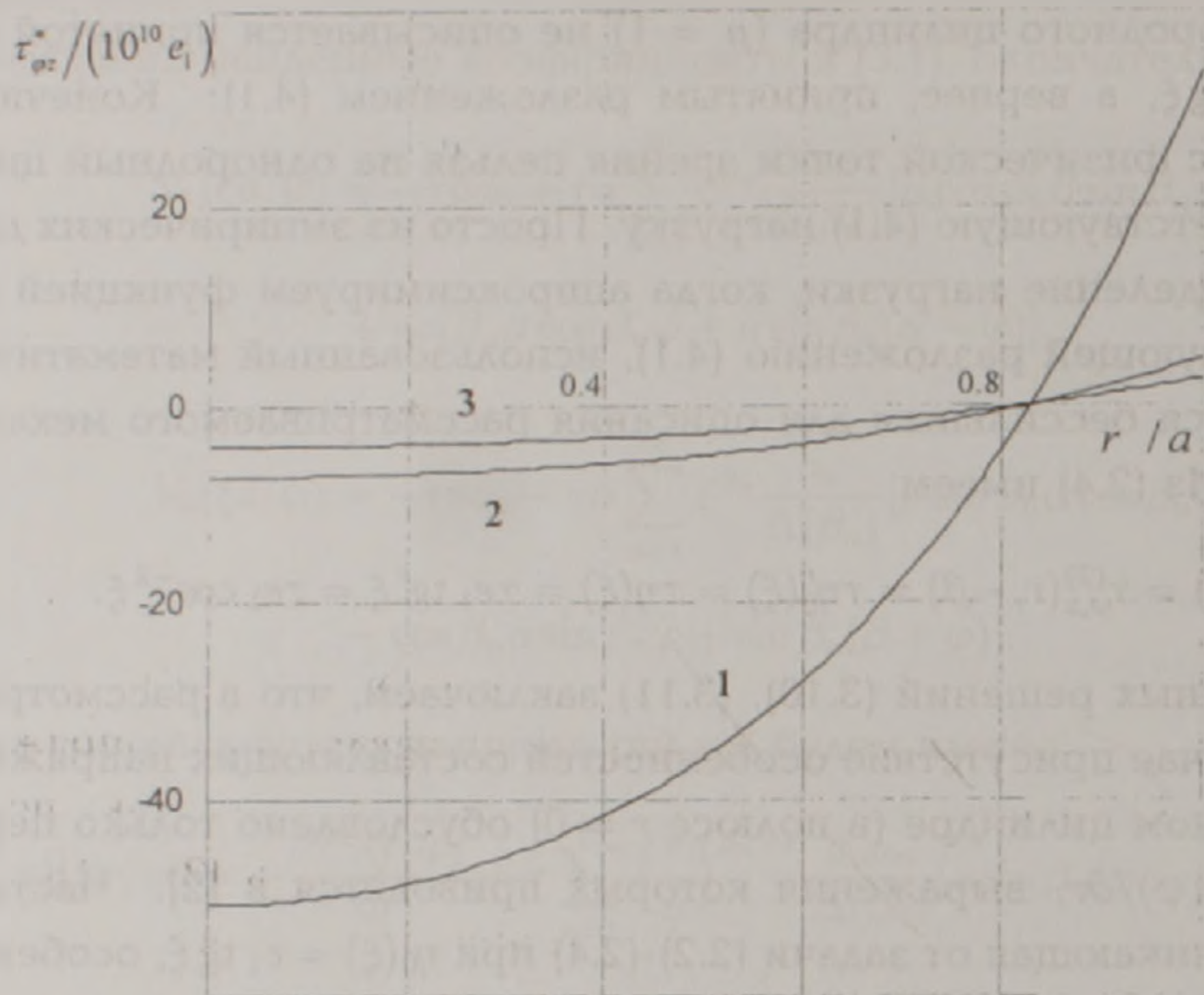


Рис. 2

Из построенных графиков видно, что напряжения $\tau_{\varphi z}^*(r, 0)$ по абсолютной величине намного больше, когда неоднородность цилиндра меньше ($\mu = 1.236$).

Таким образом, когда система сил, действующая на цилиндрической поверхности цилиндра $r = a$, уравновешена, а радиальные грани свободны, т.е. когда цилиндр совершает инерциальное движение, то задача определения антиплоской деформации решается методом разделения переменных с нахождением собственных значений (задача Штурма – Лиувилля о собственных числах), а когда цилиндр, совершая поступательное движение, движется с ускорением, только под действием систем сил, приложенных на радиальных гранях, то задача нахождения поля напряжений при антиплоской деформации опять решается методом разделения переменных, но в этом случае с определением множеств чисел, не являющихся собственными.

Институт механики НАН РА

**Напряженное состояние составного цилиндра с секторным поперечным сечением
при действии касательных нагрузок**

Исследовано напряженное состояние составного цилиндрического тела, предварительно подвергнутого антиплоской деформации под действием уравновешенной системы сил. Эта система сил действует на цилиндрической поверхности цилиндра вдоль образующей. Затем на радиальных гранях цилиндра приложена добавочная неуравновешенная или же уравновешенная система сил, также действующая вдоль образующей. Построено поле напряжений, возникающее от действия добавочной нагрузки.

Պ. Վ. Գալպճյան

**Սեկտորային լայնական հատույթով կազմած զլանի լարվածային վիճակի շոշափող
րևոների ազդեցության դեպքում**

Ներագույնվել է կազմած զլանային մարմնի լարվածային վիճակը: Հավասարակշռված ուժերի համակարգի ազդեցությամբ նախ զլանը ենթարկվել է հակահարթ դեֆորմացիայի: Ուժերի այդ համակարգը կիրառվել է զլանային մակերևույթի վրա ծնիչների երկայնությամբ: Այնուհետև շառավղային նիստերի վրա ծնիչների երկայնությամբ գործող մեկ կողմ ուղղված չհավասարակշռված կամ հավասարակշռված ուժերի համակարգով ենթարկվել է լրացուցիչ դեֆորմացիայի: Լրացուցիչ դեֆորմացիայի առաջին դեպքում շոշափող ուժերի ազդեցությամբ զլանը ստանում է արագացում՝ շարժվելով համընթաց: Երկրորդ դեպքում շոշափող ուժերը հավասարակշռված են, և զլանը շարժվում է իներցիայով: Յուրյ է փոխվել, որ լրացուցիչ դեֆորմացիայի այս երկու դեպքերում, որոնք առաջանում են միայն շառավղային նիստերի վրա գործող ուժերի ազդեցությամբ, լարումների դաշտի որոշման խնդիրը հակահարթ դեֆորմացիայի դեպքում կրկին լուծվում է փոփոխականների անջատման եղանակով, բայց այս անգամ որոշվում է սեփական արժեքների բազմություն չներկայացնող թվերի բազմություն:

P. V. Galpchian

Stressed State of Compound Cylinder with Sector Cross-Section under Tangent Loadings

The stressed state of a compound cylindrical body which had undergone the anti-planar deformation under the action of the balanced system of forces is investigated. This force system acts at the cylindrical surface along the elements of the cylinder. Then the additional balanced or non-balanced force system also acting along the cylinder element

is applied at the radial facets of the cylinder. The stress field due to the additional loading is constructed.

Литература

1. Галпчян П.В. – ДНАН Армении. 1999. Т. 99. N1. С. 22-27.
2. Галпчян П.В. – Изв. РАН. МТТ. 2002. N2. С. 68-76.
3. Алексанян Р.К. – Изв. АН Арм ССР. Механика. 1971. Т. 24. N6. С. 14-23.