

С. А. Нигиян, С. А. Аветисян

О решениях рекурсивных уравнений с отделяющейся переменной в бестиповом λ -исчислении

(Представлено академиком Н.У. Аракеляном 30/XI 2000)

1. *Используемые определения и результаты* (см.[1]). Зафиксируем счетное множество переменных V . Множество термов Λ является наименьшим множеством, удовлетворяющим следующим условиям: 1) если $x \in V$, то $x \in \Lambda$; 2) если $t_1, t_2 \in \Lambda$, то $(t_1 t_2) \in \Lambda$; 3) если $x \in V$ и $t \in \Lambda$, то $(\lambda x.t) \in \Lambda$.

Введем сокращенную запись термов: терм $(\dots (t_1 t_2) \dots t_k)$, где $t_i \in \Lambda$, $i = 1, \dots, k$, $k > 1$, условимся обозначать $t_1 t_2 \dots t_k$; терм $(\lambda x_1 (\lambda x_2 (\dots (\lambda x_m.t) \dots))$, где $x_j \in V$, $t \in \Lambda$, условимся обозначать $\lambda x_1 x_2 \dots x_m.t$, $j = 1, \dots, m$, $m > 0$.

Традиционным образом вводятся понятия свободного и связанного вхождения переменной в терм, понятие свободной переменной терма. Множество всех свободных переменных терма t условимся обозначать $FV(t)$. Терм, не содержащий свободных переменных, назовем замкнутым. Множество всех замкнутых термов будем обозначать Λ^0 .

Через $t[x]$ условимся обозначать терм t с указанием интересующей нас переменной x . Через $t[t']$ обозначим терм, полученный в результате одновременной подстановки терма t' в терм t вместо всех свободных вхождений переменной x . Через $t\{x, \dots, x\}$ условимся обозначать терм t с указанием всех $k \geq 0$ свободных вхождений переменной x (слева направо). Через $t\{t_1, \dots, t_k\}$ обозначим терм, полученный в результате одновременной подстановки термов $t_1, \dots, t_k$ в терм t вместо соответственно первого, второго и т. д., k -го свободных вхождений переменной x .

Подстановку назовем допустимой, если ни одна свободная переменная подставляемого терма не связывается в результате подстановки. Мы будем рассматривать только допустимые подстановки.

Термы t_1 и t_2 назовем конгруэнтными (обозначим $t_1 \equiv t_2$), если один терм можно получить из другого переименованием связанных переменных. Далее мы не будем отличать конгруэнтные термы.

Напомним понятие β -редукции:

$$\beta = \{(\lambda x.t[x])t', t[t'] \mid t, t' \in \Lambda, x \in V\}.$$

Одношаговая β -редукция ($\rightarrow_\beta$), β -редукция ($\rightarrow^*_\beta$) и β -равенство ($=_\beta$) определяются обычным образом. Далее условимся отношение $\rightarrow_\beta$ обозначать $\rightarrow$, отношение $\rightarrow^*_\beta$ обозначать $\rightarrow^*$, отношение $=_\beta$ обозначать $=$, т. е. опуская символ β .

Напомним, что терм $(\lambda x.t[x])t'$ называется β -редексом (далее просто редексом). Терм, не содержащий редексов, называется β -нормальной формой (далее просто нормальной формой). Множество всех нормальных форм условимся обозначать NF . Множество всех замкнутых нормальных форм - NF^0 . Будем говорить, что терм t имеет нормальную форму, если существует такой терм $t' \in NF$, что $t = t'$.

Напомним теорему о неподвижной точке, которая гласит о том, что для всякого терма $t \in \Lambda$ имеет место следующее:

$$t(Yt) = Yt ,$$

где $Y \equiv \lambda h.(\lambda x.h(xx))(\lambda x.h(xx))$ - конструктор неподвижной точки, $x, h \in V$. Мы будем широко использовать следствие теоремы Чёрча - Россера (CR-теоремы), утверждающее, что для любого терма $t \in \Lambda$ имеют место следующие два утверждения:

$$t = t', t' \in NF \Rightarrow t \rightarrow \rightarrow t',$$

$$t = t', t = t'', t', t'' \in NF \Rightarrow t' \equiv t''.$$

Мы также будем использовать теорему о замене для β -равенства, которая состоит в следующем: пусть t_{τ_1} есть терм с фиксированным вхождением подтерма τ_1 , а t_{τ_2} - терм, полученный из терма t_{τ_1} в результате замены фиксированного вхождения подтерма τ_1 на терм τ_2 , тогда $\tau_1 = \tau_2 \Rightarrow t_{\tau_1} = t_{\tau_2}$.

2. Уравнения с отделяющейся переменной и свойства их решений. Рассмотрим уравнение

$$f = t[f], \quad (1)$$

где $f \in V$, $t[f] \in \Lambda$, $FV(t[f]) \subset \{f\}$. Рассмотрим решение τ уравнения (1)

$$\tau \equiv Y(\lambda f.t[f]). \quad (2)$$

Теорема 1. Пусть дано уравнение (1) и его решение (2), пусть термы $t_0, v_1, v_2, \dots, v_k \in NF^0$, где $k \geq 0$, тогда

где $t^0[f] \equiv f$, $t^m[f] \equiv t[t^{m-1}[f]]$, $m \geq 1$.

Перед тем как перейти к непосредственному доказательству теоремы 1, введем одно понятие и докажем лемму 1.

Пусть $t[f] \in \Lambda$, $f \in V$, $FV(t[f]) = \{f\}$ и не существует такого $t' \in \Lambda^0$, что $t[f] \rightarrow \rightarrow t'$. Всякий терм вида $(\lambda x.t_1[xx])(\lambda x.t_2[xx])$, где $x \in V$, $t_1, t_2 \in \Lambda$, $t[f] \rightarrow \rightarrow t_1[f]$, $t[f] \rightarrow \rightarrow t_2[f]$, назовем ядром. Одношаговую редукцию назовем ядерной, если её редексом является ядро.

Лемма 1. Пусть $t[f] \in \Lambda$, $f \in V$, $FV(t[f]) = \{f\}$ и не существует такого $t' \in \Lambda^0$, что $t[f] \rightarrow \rightarrow t'$. Пусть $\tilde{t}[y] \in \Lambda$, $y \in V$, $\tilde{t}[(\lambda x.t[xx])(\lambda x.t[xx])] \rightarrow \rightarrow t_0$, где $t_0 \in NF^0$ и число ядерных редукций равно $r \geq 0$. Тогда $\tilde{t}[t^n[f]] \rightarrow \rightarrow t_0$, если $n \geq r$.

Доказательство леммы следует из утверждения 1.

Утверждение 1. Пусть $t[f] \in \Lambda$, $f \in V$, $FV(t[f]) = \{f\}$ и не существует такого $t' \in \Lambda^0$, что $t[f] \rightarrow \rightarrow t'$.

Пусть $\tilde{t}[y] \in \Lambda$, $y \in V$ и $\tilde{t}[y] \equiv \tilde{t}\{y, \dots, y\}$, где число свободных вхождений переменной y в терм $\tilde{t}[y]$ равно $k \geq 0$.

Пусть $t_i[f]$, $t'_i[f] \in \Lambda$, $t[f] \rightarrow \rightarrow t_i[f]$, $t[f] \rightarrow \rightarrow t'_i[f]$, $i = 1, \dots, k$, и $\tilde{t}\{(\lambda x.t_1[xx])(\lambda x.t'_1[xx]), \dots, (\lambda x.t_k[xx])(\lambda x.t'_k[xx])\} \rightarrow \rightarrow t_0$, где $t_0 \in NF^0$ и число ядерных редукций, редексы которых получены в процессе редукции из подставленных в терм $\tilde{t}\{y, \dots, y\}$ ядер, равно $r \geq 0$.

Тогда $\tilde{t} \{t^{n_1}[f], \dots, t^{n_k}[f]\} \rightarrow \rightarrow t_0$, если $n_i \geq r$, $i = 1, \dots, k$.

Доказательство. Пусть $r = 0$, тогда очевидно, что $\tilde{t} \{t^{n_1}[f], \dots, t^{n_k}[f]\} \rightarrow \rightarrow t_0$. Пусть $r > 0$ и утверждение 1 верно для $r - 1$. Докажем для r . Легко видеть, что имеет место следующее:

$$\tilde{t} \{(\lambda x.t_1[xx])(\lambda x.t_1'[xx]), \dots, (\lambda x.t_k[xx])(\lambda x.t_k'[xx])\} \rightarrow \rightarrow$$

$$\bar{t}'_1 \{(\lambda x.\bar{t}'_1[xx])(\lambda x.\bar{t}_1[xx]), \dots, (\lambda x.\bar{t}_s[xx])(\lambda x.\bar{t}'_s[xx]), \dots, (\lambda x.\bar{t}_s[xx])(\lambda x.\bar{t}'_s[xx])\},$$

где $(\lambda x.\bar{t}_i[xx])(\lambda x.\bar{t}'_i[xx])$, $i = 1, \dots, s$, $s \geq 1$, есть все ядра, полученные в процессе редукции из ядер, подставленных в терм $\tilde{t} \{y, \dots, y\}$, и число ядерных редукций, редексами которых являются такие ядра, равно 0. Далее мы фиксируем момент первой интересующей нас ядерной редукции:

$$\sim \bar{t}'_1 \{(\lambda x.\bar{t}_1[xx])(\lambda x.\bar{t}'_1[xx]), \dots, (\lambda x.\bar{t}_i[xx])(\lambda x.\bar{t}'_i[xx]), \dots, (\lambda x.\bar{t}_s[xx])(\lambda x.\bar{t}'_s[xx])\} \rightarrow$$

$$\sim \bar{t}'_1 \{(\lambda x.\bar{t}_1[xx])(\lambda x.\bar{t}'_1[xx]), \dots, \bar{t}_i[(\lambda x.\bar{t}'_i[xx])(\lambda x.\bar{t}_i[xx])], \dots, (\lambda x.\bar{t}_s[xx])(\lambda x.\bar{t}'_s[xx])\} \equiv$$

$$\sim \bar{t}_1 \{(\lambda x.\bar{t}_1[xx])(\lambda x.\bar{t}'_1[xx]), \dots, (\lambda x.\bar{t}'_i[xx])(\lambda x.\bar{t}_i[xx]), \dots, (\lambda x.\bar{t}'_i[xx])(\lambda x.\bar{t}_i[xx]), \dots,$$

$\dots, (\lambda x.\bar{t}_s[xx])(\lambda x.\bar{t}'_s[xx])\} \rightarrow \rightarrow$ (число ядерных редукций, редексы которых получены в процессе редукции из подставленных в терм $\tilde{t}$ ядер, равно $r - 1$) $\rightarrow \rightarrow t_0$.

С другой стороны:

$$\sim \tilde{t} \{t^{n_1}[f], \dots, t^{n_k}[f]\} \rightarrow \rightarrow \bar{t}'_1 \{t^{n'_1}[f], \dots, t^{n'_i}[f], \dots, t^{n'_s}[f]\},$$

где $n'_i \in \{n_1, \dots, n_k\}$, $i = 1, \dots, s$, $s \geq 1$. Далее имеем: $\tilde{t}'_1 \{t^{n'_1}[f], \dots, t^{n'_i}[f], \dots, t^{n'_s}[f]\} \rightarrow \rightarrow \tilde{t}'_1 \{t^{n'_1}[f], \dots, \bar{t}_i[t^{n'_i-1}[f]], \dots, t^{n'_s}[f]\} \equiv \tilde{t}'_1 \{t^{n'_1}[f], \dots, t^{n'_i-1}[f], \dots, t^{n'_i-1}[f], \dots, t^{n'_s}[f]\} \rightarrow \rightarrow$ (по предположению индукции) $\rightarrow \rightarrow t_0$.

Утверждение 1 доказано.

Доказательство теоремы 1. ($\Leftarrow$) Пусть $t^n[f]v_1v_2\dots v_k \rightarrow \rightarrow t_0$ для некоторого $n > 0$. Тогда, как легко видеть, $t^n[\tau]v_1v_2\dots v_k \rightarrow \rightarrow t_0$. Так как τ - решение уравнения (1), то $\tau = t^n[\tau]$, $\tau v_1v_2\dots v_k = t^n[\tau]v_1v_2\dots v_k$, и по следствию CR-теоремы имеем: $\tau v_1v_2\dots v_k \rightarrow \rightarrow t_0$.

($\Rightarrow$) Пусть $\tau v_1 v_2 \dots v_k \rightarrow \rightarrow t_0$. Возможны два случая:

- a) $\exists t' \in V^0, t[f] \rightarrow \rightarrow t'$,
- b) $\neg \exists t' \in V^0, t[f] \rightarrow \rightarrow t'$.

Рассмотрим случай (a). Так как $t[f] \rightarrow \rightarrow t'$ и $t' \in V^0$, то $t[\tau] \rightarrow \rightarrow t'$. Так как τ - решение уравнения (1), то $\tau = t[\tau]$ и $\tau v_1 v_2 \dots v_k = t[\tau] v_1 v_2 \dots v_k = t' v_1 v_2 \dots v_k$. Следовательно, согласно следствию CR-теоремы, $t' v_1 v_2 \dots v_k \rightarrow \rightarrow t_0$. Таким образом, $t[f] v_1 v_2 \dots v_k \rightarrow \rightarrow t' v_1 v_2 \dots v_k \rightarrow \rightarrow t_0$, и $n = 1$.

Рассмотрим случай (b). Легко видеть, что $\tau \equiv Y(\lambda f. t[f]) \equiv (\lambda h. (\lambda x. h(xx))(\lambda x. h(xx))) (\lambda f. t[f]) \rightarrow (\lambda x. (\lambda f. t[f])(xx))(\lambda x. (\lambda f. t[f])(xx)) \rightarrow \rightarrow (\lambda x. t[xx])(\lambda x. t[xx]) \rightarrow t[(\lambda x. t[xx])(\lambda x. t[xx])]$.

Следовательно, $\tau v_1 v_2 \dots v_k = t[(\lambda x. t[xx])(\lambda x. t[xx])] v_1 v_2 \dots v_k \equiv \tilde{t} [(\lambda x. t[xx])(\lambda x. t[xx])]$. По следствию CR-теоремы имеем: $\tilde{t} [(\lambda x. t[xx])(\lambda x. t[xx])] \rightarrow \rightarrow t_0$, где число ядерных редукций равно некоторому $r, r \geq 0$. Пусть $n = r + 1$. Тогда, согласно лемме 1, имеем:

$$t^n[f] v_1 v_2 \dots v_k \equiv t[t^{n-1}[f]] v_1 v_2 \dots v_k \equiv \tilde{t} [t^{n-1}[f]] \rightarrow \rightarrow t_0.$$

Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Не существует такого алгоритма, который по каждому уравнению (1) и термам $v_1, v_2, \dots, v_k \in NF^0$, где $k \geq 0$, отвечает на вопрос о существовании такого $n \geq 1$, при котором терм $t^n[f] v_1 v_2 \dots v_k$ имеет замкнутую нормальную форму.*

Доказательство. Проблема существования нормальной формы для замкнутого терма, которая является неразрешимой (см. [1]), сводится к рассматриваемой проблеме. Пусть терм $t \in \Lambda^0$. Рассмотрим уравнение $f = t[f]$, $f \in V$, и возьмем $k = 0$. Очевидно, что для любого $n \geq 1$ $t^n[f] \equiv t[f]$, так как терм t замкнут. Следовательно, вопрос о существовании требуемого n эквивалентен вопросу о существовании нормальной формы для терма t . Теорема 2 доказана.

Теорема 3. *Существует алгоритм, который по каждому уравнению (1) и термам $v_1, v_2, \dots, v_k \in NF^0, k \geq 0$, таким, что терм $t^n[f] v_1 v_2 \dots v_k$ имеет замкнутую нормальную форму для некоторого $n \geq 1$, строит такое n .*

Доказательство следует из теоремы 1 и леммы 1.

Рассмотрим уравнение (1) и последовательность $\bar{v}$ замкнутых нормальных форм $v_1, v_2, \dots, v_k, k \geq 0$. Определим вычислительную последовательность $t_1[f], \dots, t_n[f], \dots$, состоящую из нормальных форм, которую обозначим $\text{Seq}(t[f], \bar{v})$ (если $k = 0$, то $\text{Seq}(t[f])$ обозначает ту же последовательность, что и $\text{Seq}(t[f], \bar{v})$). Последовательность $\text{Seq}(t[f], \bar{v})$ может быть либо пустой, либо конечной, либо бесконечной. В бесконечной последовательности все её члены - незамкнутые нормальные формы. Члены конечной последовательности либо все незамкнуты, либо замкнут только последний её член. Вычислительная последовательность $\text{Seq}(t[f], \bar{v})$ пуста, если терм $t[f] v_1 v_2 \dots v_k$ не имеет нормальной формы. Если терм $t[f] v_1 v_2 \dots v_k$ имеет нормальную форму, то вычислительная последовательность не пуста и определяется следующим образом:

$t_1[f]$ есть нормальная форма терма $t[f] v_1 v_2 \dots v_k$. Пусть уже построена подпоследовательность $t_1[f], \dots, t_i[f], i \geq 1$, определим, как строится ее продолжение.

Если $t_i[f] \in NF^0$ или терм $t_i[t[f]]$ не имеет нормальной формы, то $t_i[f]$ есть последний член вычислительной последовательности.

Если $t_i[f] \in NF \setminus NF^0$ и терм $t_i[t[f]]$ имеет нормальную форму, то $t_{i+1}[f]$ есть нормальная форма терма $t_i[t[f]]$.

Теорема 4. Пусть дано уравнение (1), его решение (2) и последовательность $\bar{v}$ замкнутых нормальных форм $v_1, v_2, \dots, v_k$, $k \geq 0$, тогда:

a) если вычислительная последовательность $Seq(t[f], \bar{v})$ конечна и имеет вид $t_1[f], \dots, t_n[f]$, где $t_n[f] \in NF^0$, $n \geq 1$, то $\tau v_1 v_2 \dots v_k \rightarrow \rightarrow t_n[f]$;

b) если вычислительная последовательность $Seq(t[f], \bar{v})$ бесконечна, то терм $\tau v_1 v_2 \dots v_k$ не имеет нормальной формы;

c) если вычислительная последовательность $Seq(t[f], \bar{v})$ пуста, или конечна и при этом имеет вид $t_1[f], \dots, t_n[f]$, где $n \geq 1$, $t_n[f] \in NF \setminus NF^0$ и терм $t_n[t[f]]$ не имеет нормальной формы, то терм $\tau v_1 v_2 \dots v_k$ может как иметь, так и не иметь нормальную форму.

Доказательство. (a) $Seq(t[f], \bar{v})$ есть вычислительная последовательность $t_1[f], \dots, t_n[f]$, где:

$$\begin{aligned} t[f]v_1 v_2 \dots v_k &\rightarrow \rightarrow t_1[f], & t_1[f] &\in NF \setminus NF^0, \\ t_1[t[f]] &\rightarrow \rightarrow t_2[f], & t_2[f] &\in NF \setminus NF^0, \\ &\dots & \dots & \\ t_{n-2}[t[f]] &\rightarrow \rightarrow t_{n-1}[f], & t_{n-1}[f] &\in NF \setminus NF^0, \\ t_{n-1}[t[f]] &\rightarrow \rightarrow t_n[f], & t_n[f] &\in NF^0. \end{aligned}$$

Легко видеть, что имеет место следующее:

$$\begin{aligned} t^n[f]v_1 v_2 \dots v_k &\equiv t[t^{n-1}[f]]v_1 v_2 \dots v_k \rightarrow \rightarrow t_1[t^{n-1}[f]] \rightarrow \rightarrow t_2[t^{n-2}[f]] \rightarrow \rightarrow \dots \\ &\dots \rightarrow \rightarrow t_{n-1}[t[f]] \rightarrow \rightarrow t_n[f]. \end{aligned}$$

Следовательно, согласно теореме 1, $\tau v_1 v_2 \dots v_k \rightarrow \rightarrow t_n[f]$.

(b) В этом случае вычислительная последовательность $t_1[f], \dots, t_n[f], \dots$ бесконечна. Покажем, что для любого $n \geq 1$ терм $t^n[f]v_1 v_2 \dots v_k$ имеет незамкнутую нормальную форму. Аналогично пункту (a) имеем: $t^n[f]v_1 v_2 \dots v_k \rightarrow \rightarrow t_n[f]$, где $t_n[f] \in NF \setminus NF^0$, $n \geq 1$. Таким образом, не существует такого $n \geq 1$, что $t^n[f]v_1 v_2 \dots v_k \rightarrow \rightarrow t_0$ и $t_0 \in NF^0$. Следовательно, согласно теореме 1, терм $\tau v_1 v_2 \dots v_k$ не имеет нормальной формы, так как он замкнут.

(c) Перед доказательством данного пункта введем обозначения для некоторых термов. Пусть $x, y \in V$, тогда:

$$I \equiv \lambda x.x, \quad T \equiv \lambda x y.x, \quad F \equiv \lambda x y.y, \quad \Omega \equiv (\lambda x.xx)(\lambda x.xx),$$

$$\text{if } t_1 \text{ then } t_2 \text{ else } t_3 \equiv t_1 t_2 t_3, \text{ где } t_1, t_2, t_3 \in \Lambda,$$

$$\lceil 0 \rceil \equiv I, \quad \lceil n+1 \rceil \equiv \lambda x.xF \lceil n \rceil, \text{ где } n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$\text{Zero} \equiv \lambda x.xT, \quad S^+ \equiv \lambda x y.xFy, \quad P^- \equiv \lambda x.xF.$$

Для каждого $t \in \Lambda$ терм S^+t условимся обозначать t^+ , а терм $P^-t - t^-$.

Рассмотрим уравнение

$$f = \Omega,$$

где $f \in V$. Легко видеть, что последовательность $\text{Seq}(\Omega)$ пуста, так как терм Ω не имеет нормальной формы. Не имеет нормальной формы и терм $\tau \equiv Y(\lambda f. \Omega) \equiv (\lambda h. (\lambda x. h(xx)))(\lambda x. h(xx))(\lambda f. \Omega) \rightarrow (\lambda x. (\lambda f. \Omega)(xx))(\lambda x. (\lambda f. \Omega)(xx)) \rightarrow \rightarrow (\lambda x. \Omega)(\lambda x. \Omega) \rightarrow \Omega$.

Рассмотрим уравнение

$$f = \lambda x. \text{ if Zero } x \text{ then } \lambda x. I \text{ else } (fx^-)\Omega \equiv t[f],$$

где $x, f \in V$. Покажем, что последовательность $\text{Seq}(t[f], \lceil 1 \rceil)$ пуста.

$t[f] \lceil 1 \rceil \equiv (\lambda x. \text{ if Zero } x \text{ then } \lambda x. I \text{ else } (fx^-)\Omega) \lceil 1 \rceil \rightarrow \rightarrow f \lceil 0 \rceil \Omega$, следовательно, терм $t[f] \lceil 1 \rceil$ не имеет нормальной формы. Однако, согласно теореме 1, $\tau \lceil 1 \rceil \rightarrow \rightarrow I$, так как $t^2[f] \lceil 1 \rceil \rightarrow \rightarrow I$. Покажем это: $t^2[f] \lceil 1 \rceil \equiv (\lambda x. \text{ if Zero } x \text{ then } \lambda x. I \text{ else } ((\lambda x. \text{ if Zero } x \text{ then } \lambda x. I \text{ else } (fx^-)\Omega)x^-)\Omega) \lceil 1 \rceil \rightarrow \rightarrow ((\lambda x. \text{ if Zero } x \text{ then } \lambda x. I \text{ else } (fx^-)\Omega) \lceil 0 \rceil) \Omega \rightarrow \rightarrow (\lambda x. I) \Omega \rightarrow I$.

Рассмотрим уравнение

$$f = \lambda x. \text{ if Zero } x \text{ then } fx^+ \text{ else } \Omega \equiv t[f],$$

где $x, f \in V$. Покажем, что последовательность $\text{Seq}(t[f], \lceil 0 \rceil)$ состоит из одного элемента $t_1[f]$, представляющего собой незамкнутую нормальную форму.

$$t[f] \lceil 0 \rceil \equiv (\lambda x. \text{ if Zero } x \text{ then } fx^+ \text{ else } \Omega) \lceil 0 \rceil \rightarrow \rightarrow f \lceil 1 \rceil \equiv t_1[f] \in NF \setminus NF^0.$$

$t_1[t[f]] \equiv (\lambda x. \text{ if Zero } x \text{ then } fx^+ \text{ else } \Omega) \lceil 1 \rceil \rightarrow \rightarrow \Omega$, следовательно, терм $t_1[t[f]]$ не имеет нормальной формы. Согласно теореме 1, не имеет нормальной формы и терм $\tau \lceil 0 \rceil$, так как для любого $n > 1$ $t^n[f] \lceil 0 \rceil = \Omega$.

Рассмотрим уравнение

$$f = \lambda x. \text{ if Zero } x \text{ then } fx^+ \text{ else } (\text{if Zero } x^- \text{ then } (fx^+)\Omega \text{ else } \lambda x. I) \equiv t[f],$$

где $x, f \in V$.

Покажем, что последовательность $\text{Seq}(t[f], \lceil 0 \rceil)$ состоит из одного элемента $t_1[f]$, представляющего собой незамкнутую нормальную форму.

$$t[f] \lceil 0 \rceil \equiv (\lambda x. \text{ if Zero } x \text{ then } fx^+ \text{ else } (\text{if Zero } x^- \text{ then } (fx^+)\Omega \text{ else } \lambda x. I)) \lceil 0 \rceil \rightarrow \rightarrow f \lceil 1 \rceil \Omega \equiv t_1[f] \in NF \setminus NF^0.$$

$t_1[t[f]] \equiv (\lambda x. \text{ if Zero } x \text{ then } fx^+ \text{ else } (\text{if Zero } x^- \text{ then } (fx^+)\Omega \text{ else } \lambda x. I)) \lceil 1 \rceil \rightarrow \rightarrow f \lceil 2 \rceil \Omega$, следовательно, терм $t_1[t[f]]$ не имеет нормальной формы. Однако, согласно теореме 1, $\tau \lceil 0 \rceil \rightarrow \rightarrow I$, так как $t^3[f] \lceil 0 \rceil \rightarrow \rightarrow I$.

Теорема 4 доказана.

Теорема 5. Пусть дано уравнение (1), его решение (2) и термы $t_0, v_1, v_2, \dots, v_k \in NF^0$, где $k \geq 0$. Пусть τ' - некоторое решение уравнения (1). Тогда: $\tau v_1 v_2 \dots v_k \rightarrow \rightarrow t_0 \Rightarrow \tau' v_1 v_2 \dots v_k \rightarrow \rightarrow t_0$.

Доказательство. Пусть $\tau v_1 v_2 \dots v_k \rightarrow \rightarrow t_0$, тогда, согласно теореме 1, существует такое $n \geq 1$, что $t^n[f] v_1 v_2 \dots v_k \rightarrow \rightarrow t_0$. Следовательно, и $t^n[\tau'] v_1 v_2 \dots v_k \rightarrow \rightarrow t_0$. Так как τ' - решение уравнения (1), то $\tau' = t^n[\tau']$, $\tau' v_1 v_2 \dots v_k = t^n[\tau'] v_1 v_2 \dots v_k$ и, согласно следствию CR-теоремы, $\tau' v_1 v_2 \dots v_k \rightarrow \rightarrow t_0$. Теорема 5 доказана.

Теорема 6. Существует такое уравнение (1), такое его решение τ' , и такие термы $t_0, v_1, v_2, \dots, v_k \in NF^0$, где $k \geq 0$, что:

$$\tau'v_1v_2\dots v_k \rightarrow\rightarrow t_0, \quad \text{однако} \quad \tau v_1v_2\dots v_k \not\rightarrow\rightarrow t_0.$$

Доказательство. Рассмотрим уравнение $f = f$, где $f \in V$, и его решение $\tau' \equiv \lambda x.x$. Терм $t_0 \equiv \lambda x.x$ и $k = 0$. Очевидно, что $\tau' \rightarrow\rightarrow t_0$. Покажем, что терм τ не имеет нормальной формы: $\tau \equiv Y(\lambda f.f) \equiv (\lambda h. (\lambda x.h(xx))(\lambda x.h(xx)))(\lambda f.f) \rightarrow (\lambda x.(\lambda f.f)(xx))(\lambda x.(\lambda f.f)(xx)) \rightarrow\rightarrow (\lambda x.xx)(\lambda x.xx) \equiv \Omega$. Теорема 6 доказана.

Ереванский государственный университет
ЕрНИИ АСУ

Литература

1. *Barendregt H.P.* The Lambda Calculus, Its Syntax and Semantics. North-Holland Pub. Comp., 1981 (рус. пер. Барендрегт Х. Ламбда-исчисление, его синтаксис и семантика. М.: Мир, 1985).

Ս. Ա. Նիզիյան, Ս. Ա. Ավետիսյան

**Ոչ-տիպային λ -հաշվում անջատվող փոփոխականով
ռեկուրսիվ հավասարումների լուծումների մասին**

Ներկայացվող աշխատանքը վերաբերվում է ոչ-տիպային λ -հաշվին: Նրանում դիտարկվում են $f=t[f]$ տեսքի հավասարումներ, որտեղ f -ը փոփոխականն է, $t[f]$ -ը՝ տերմը, որը, ընդհանրապես ասած, կախված է f -ից: Այդպիսի հավասարման լուծում է հանդիսանում հետևյալ τ տերմը՝ $\tau=\beta t[\tau]$: Հայտնի է, թե ինչպես կարելի է ստանալ τ տերմը, օգտագործելով Y անշարժ կետի կոնստրուկտորը: Կիրառելով τ -ն $v_1, \dots, v_k, k \geq 0$, փակ նորմալ ձևերի նկատմամբ, մենք ստանում ենք $\tau v_1 \dots v_k$ տերմը, որը կարող է ինչպես ունենալ, այնպես էլ չունենալ նորմալ ձև: Մենք ցույց ենք տալիս, որ $\tau v_1 \dots v_k$ տերմն ունի նորմալ ձև այն և միայն այն դեպքում, երբ հենց այդպիսի փակ նորմալ ձև ունի $t^n[f] v_1, \dots, v_k$ տերմը որևէ $n \geq 1$ -ի համար, որտեղ $t^0[f]$ -ը f -ն է, իսկ $t^m[f]$ -ը $t[t^{m-1}[f]]$ -ն է, $m \geq 1$: Դիտարկվում են այդպիսի n -ի գոյության հետ կապված ալգորիթմական խնդիրներ: $\tau v_1 \dots v_k$ տերմի նորմալ ձևը ստանալու համար սահմանվում է հաշվարկման հաջորդականություն, որը հենված է տեղադրման և հետագա ռեդուկցիայի վրա, և որի անդամները նորմալ ձևեր են: Այդ հաջորդականությունը ոչ միշտ է բերում փակ նորմալ ձևի, նույնիսկ այն դեպքում, երբ այդպիսինը գոյություն ունի: Սակայն եթե այն բերում է փակ նորմալ ձևի, այդ նորմալ ձևը լինում է պահանջվածը: Կատարվում է համեմատություն հավասարման Y անշարժ կետի կոնստրուկտորի օգնությամբ ստացված լուծման և մյուս լուծումների միջև: