ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Том 98 1998 №4

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

УДК 539.3

Д. Я. Бардзокас, А. И. Зобнин, Б. А. Кудрявцев

Обобщенное интегральное преобразование типа Конторовича-Лебедева, используемое при решении граничных задач теории упругости

(Представлено академиком НАН Армении Б.Л.Абрамяном 21/IV 1998)

Интегральное преобразование Конторовича-Лебедева ([1]) используется для решения многих краевых задач математической физики и теории упругости.

Указанные в работе ([2]) интегральные преобразования, родственные преобразованию Конторовича-Лебедева, удобны для решения смешанных краевых задач для клиновидных и конических областей.

В работах ([1-3]) одновременно предлагается вывод новых интегральных преобразований, которые можно использовать при решении некоторых краевых задач для слоистых сред периодической структуры. Для вывода соответствующих формул обращения различных интегральных преобразований в этих работах применялся единый подход, развитый в ([4]), а также метод асимптотического интегрирования самосопряженных дифференциальных уравнений второго порядка с быстроосциллирующими периодическими коэффициентами ([5]). В результате были получены формулы, обобщающие синус- и косинус-преобразование Фурье ([1]), преобразование Меллина ([2]), а также преобразования типа Фурье–Бесселя, Ханкеля и Вебера–Орра ([3]). В частности, в этих работах показано, что данные преобразования можно эффективно использовать при решении краевых задач стационарной теплопроводности слоистой полуплоскости ([1]), многослойного клина, состоящего из отдельных слоев одинаковой толщины ([2]), многослойного цилиндра и плоского слоя с цилиндрическими слоями ([3]). Очевидно, что введение новых типов интегральных преобразований, используемых при решении краевых задач для периодически-неоднородных сред, значительно расширяет возможности традиционных методов математической физики.

Рассмотрим задачу о разложении заданной функции $f(r)$ $(0 \le r < \infty)$ по собственным функциям краевой задачи для уравнения

$$\frac{d}{dr}\left(A(\rho)r\frac{du}{dr}\right)-\left(rD(\rho)-\frac{\tau^2}{r}B(\rho)\right)u=0. \tag{1}$$

Здесь $A(\rho), B(\rho), D(\rho)$ – заданные 1-периодические функции "быстрой" переменной $\rho=r/\varepsilon$, ε – малый параметр, а краевые условия имеют вид

$$u(0)<\infty,\ \ u(\infty)=0. \tag{2}$$

Следуя ([6]), рассмотрим уравнение в частных производных для функции $u(r,t)$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(A(\rho)r\frac{\partial u(r,t)}{\partial r}\right)-rD(\rho)u(r,t)=\frac{B(\rho)}{r}\frac{\partial u(r,t)}{\partial t} \tag{3}$$

и найдем его решение при граничных условиях (2) и начальном условии

$$u(r,0)=f(r)\ . \tag{4}$$

После применения преобразования Лапласа к уравнению (3) получим с помощью начального условия (4) следующее равенство:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(A(\rho)r\frac{\partial\bar{u}(r,\rho)}{\partial r}\right)-\left(rD(\rho)+p\frac{B(\rho)}{r}\right)\bar{u}=-\frac{B(\rho)}{r}f(r). \tag{5}$$

Здесь

$$\bar{u}(r,p)=\int_0^\infty u(r,t)e^{-pt}dt.$$

Решение неоднородного уравнения (5) можно записать так ([6])

$$\bar{u}(r,p)=-\frac{1}{\omega(p)}\int_0^\infty G(r,\xi,p)B\left(\frac{\xi}{\varepsilon}\right)f(\xi)\frac{d\xi}{\xi}, \tag{6}$$

где

$$G(r,\xi,p)=\begin{cases}\bar{u}_1(r,p)\bar{u}_2(\xi,p), & r\le\varepsilon,\\ \bar{u}_1(\xi,p)\bar{u}_2(r,p), & r>\varepsilon,\end{cases} \tag{7}$$

$$\omega(p)=A(\rho)W\left(\bar{u}_1,\ \bar{u}_2\right), \tag{8}$$

$\bar{u}_1(r,p)$, $\bar{u}_2(r,p)$ – линейно-независимые решения однородного уравнения (5), $\overline{W}\left(\bar{u}_1,\ \bar{u}_2\right)$ – вронскиан решений $\bar{u}_1$, $\bar{u}_2$. Учитывая наличие быстроизменяющихся 1-периодических коэффициентов $A(\rho), B(\rho), D(\rho)$ в однородном уравнении (5), найдем его решение с помощью метода асимптотических разложений в виде ряда по степеням малого параметра ε. Используя известную процедуру построения двухмасштабного разложения решения уравнения (5) с 1-периодическими коэффициентами ([7]) и сохраняя в этом разложении три первых члена, получим представление

$$
\bar{u}(r,p)=u_0(r,p)+\varepsilon N_1(\rho)\frac{du_0(r,p)}{dr}+
$$
$$
+\varepsilon^2\left[N_2^{(1)}(\rho)\frac{d^2u_0(r,p)}{dr^2}+N_2^{(2)}(\rho)\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{du_0(r,p)}{dr}\right)+N_2^{(3)}(\rho)u_0(r,p)\right]+\ldots \tag{9}
$$

где локальные функции $N_1(\rho)$, $N_2^{(i)}(\rho)$, $i=1,2,3$, $\rho=r/\varepsilon$ являются I-периодическими по переменной ρ и в пределах ячейки $0\le\rho\le1$ удовлетворяют следующим уравнениям:

$$
\frac{dN_1(\rho)}{d\rho}=\frac{C_1}{A(\rho)^{-1}},\ C_1=<A^{-1}>^{-1}, \tag{10}
$$

$$
\frac{dN_2^{(1)}(\rho)}{d\rho}=-N_1(\rho), \tag{11}
$$

$$
\frac{d}{d\rho}\left(A(\rho)\frac{dN_2^{(2)}(\rho)}{d\rho}\right)+C_1\left(1-\frac{B(\rho)}{<B>}\right)=0, \tag{12}
$$

$$
\frac{d}{d\rho}\left(A(\rho)\frac{dN_2^{(3)}(\rho)}{d\rho}\right)=D(\rho)-\frac{<D>}{<B>}B(\rho). \tag{13}
$$

Здесь символ <...> означает операцию осреднения по ячейке периодичности, например

$$
<D>=\int_0^1 D(\rho)d\rho .
$$

Функция $u_0(r,p)$ в (9) является решением обыкновенного дифференциального уравнения

$$
\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{du_0(r,p)}{dr}\right)-\left(\gamma^2+p\frac{\chi^2}{r^2}\right)u_0(r,p)=0,
$$
$$
\gamma^2=<D>/C_1,\ \chi^2=<B>/C_1,\ C_1=<A^{-1}>^{-1}. \tag{14}
$$

Два линейно-независимых решения уравнения (14) можно выразить через модифицированные функции Бесселя

$$
u_{01}=I_{\chi\sqrt{p}}(\gamma r),\quad u_{02}=K_{\chi\sqrt{p}}(\gamma r). \tag{15}
$$

Подставив (15) в (9), получим искомые линейно-независимые решения однородного уравнения (5) с точностью до членов порядка ε^2

$$
\bar{u}_1(r,p)=I_{\chi\sqrt{p}}(\gamma r)+\varepsilon N_1(\rho)\left(\gamma I_{\chi\sqrt{p+1}}\gamma r+\frac{\chi\sqrt{p}}{r}I_{\chi\sqrt{p}}(\gamma r)\right)+
$$
$$
+\varepsilon^2\left\{N_2^{(1)}(\rho)\left[\left(\gamma^2+\frac{\chi\sqrt{p}}{r^2}\left(\chi\sqrt{p}-1\right)\right)I_{\chi\sqrt{p}}(\gamma r)-\frac{\gamma}{r}I_{\chi\sqrt{p+1}}(\gamma r)\right]+\right. \tag{16}
$$
$$
\left.+N_2^{(2)}(\rho)\left(\gamma^2+\frac{\chi^2p}{r^2}\right)I_{\chi\sqrt{p}}(\gamma r)+N_2^{(3)}(\rho)I_{\chi\sqrt{p}}(\gamma r)\right\}+\ldots
$$

$$\bar{u}_2(r,p) = K_{\chi\sqrt{p}}(\gamma r) + \varepsilon N_1(\rho)\left(-\gamma K_{\chi\sqrt{p+1}}(\gamma r) + \frac{\chi\sqrt{p}}{r} K_{\chi\sqrt{p}}(\gamma r)\right) +$$

$$+\varepsilon^2 \left\{ N_2^{(1)}(\rho)\left[\left(\gamma^2 + \frac{\chi\sqrt{p}}{r^2}\left(\chi\sqrt{p}-1\right)\right) K_{\chi\sqrt{p}}(\gamma r) + \frac{\gamma}{r} K_{\chi\sqrt{p+1}}(\gamma r)\right] + \right. \quad (17)$$

$$\left. + N_2^{(2)}(\rho)\left(\gamma^2 + \frac{\chi^2 p}{r^2}\right) K_{\chi\sqrt{p}}(\gamma r) + N_2^{(3)}(\rho) K_{\chi\sqrt{p}}(\gamma r) \right\} + \ldots$$

Можно показать, что вронскиан для $\bar{u}_1, \bar{u}_2$ имеет вид

$$\bar{W}\left(\bar{u}_1, \bar{u}_2\right) = -\frac{C_1}{A(\rho) r},$$

и, следовательно

$$\omega(p) = -C_1$$

Обратимся теперь к решению неоднородного уравнения (5) в форме (6). Переходя в (6) к оригиналам, получим

$$u(r,t) = \frac{1}{c_1}\int_0^\infty J(r,\xi,t) B\left(\frac{\xi}{\varepsilon}\right) f(\xi)\frac{d\xi}{\xi}, \quad (18)$$

где

$$J(r,\xi,t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} G(r,\xi,p) e^{pt} dp. \quad (19)$$

Подынтегральная функция в (19) имеет точку ветвления $p=0$ и поэтому, проводя разрез вдоль отрицательной части вещественной оси, представим (19) при $r \le \xi$ в виде

$$J(r,\xi,t)\big|_{r\le\xi} = -\frac{1}{2\pi i}\left\{\int_0^\infty \bar{u}_1(r,\eta e^{i\pi})\bar{u}_2(\xi,\eta e^{i\pi}) e^{-\eta t} d\eta - \right.$$

$$\left. -\int_0^\infty \bar{u}_1(r,\eta e^{-i\pi})\bar{u}_2(\xi,\eta e^{-i\pi}) e^{-\eta t} d\eta \right\}. \quad (20)$$

Подставляя в (20) выражения для $\bar{u}_1, \bar{u}_2$ в соответствии с (16), (17) и выполняя ряд преобразований, получим следующее представление интеграла (19), справедливое также и при $r > \xi$:

$$J(r,\xi,t) = \frac{2}{\pi^2\chi}\int_0^\infty sh(\pi\tau) R(\tau,r) R(\tau,\xi) e^{-\frac{\tau^2 t}{\chi^2}} \tau d\tau, \quad (21)$$

где

$$R(\tau,r)=K_{i\tau}(\gamma r)+\varepsilon N_1\left(\frac{r}{\varepsilon}\right)\left(-\gamma K_{i\tau+1}(\gamma r)+\frac{i\tau}{r}K_{i\tau}(\gamma r)\right)+$$

$$+\varepsilon^2\left\{N_2^{(1)}\left(\frac{r}{\varepsilon}\right)\left[\left(\gamma^2-\frac{\tau^2}{r^2}-\frac{i\tau}{r^2}\right)K_{i\tau}(\gamma r)+\frac{\gamma}{r}K_{i\tau+1}(\gamma r)\right]+\right. \tag{22}$$

$$\left.+N_2^{(2)}\left(\frac{r}{\varepsilon}\right)\left(\gamma^2-\frac{\tau^2}{r^2}\right)K_{i\tau}(\gamma r)+N_2^{(3)}\left(\frac{r}{\varepsilon}\right)K_{i\tau}(\gamma r)\right\}+\ldots$$

Заметим, что при выводе (21) использовалась известная формула для модифицированных функций Бесселя ([8])

$$\frac{2}{\pi}\sin\pi\nu K_\vartheta(z)=I_{-\nu}(z)-I_\nu(z).$$

Теперь на основании (18) и (21) можно найти

$$u(r,t)=\frac{2}{\pi^2 C_1\chi}\int_0^\infty\int_0^\infty R(\tau,r)R(\tau,\xi)e^{-\frac{\tau^2 t}{\chi^2}}sh(\pi\tau)B\left(\frac{\xi}{\varepsilon}\right)f(\xi)d\tau d\xi,$$

откуда с учетом начального условия (4) получается искомое представление

$$f(r)=\frac{2}{\pi^2 c_1\chi}\int_0^\infty sh(\pi\tau)R(\tau,r)\tau d\tau\int_0^\infty R(\tau,\xi)B\left(\frac{\xi}{\varepsilon}\right)f(\xi)\frac{d\xi}{\xi}. \tag{23}$$

Определяя преобразование функции $f(r)$ интегралом

$$\overline{f}(\tau)=\int_0^\infty f(\xi)R(\tau,\xi)B\left(\frac{\xi}{\varepsilon}\right)\frac{d\xi}{\xi}, \tag{24}$$

найдем, исходя из (23), соответствующую формулу обращения обобщенного преобразования Конторовича-Лебедева

$$f(r)=\frac{2}{\pi^2 <B>}\int_0^\infty sh(\pi\tau)\overline{f}(\tau)R(\tau,r)\tau d\tau, \tag{25}$$

Следует отметить, что функция $R(\tau,r)$ удовлетворяет уравнению с быстроизменяющимися I-периодическими коэффициентами

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(A(\rho)r\frac{dR(\tau,r)}{dr}\right)-\left(D(\rho)-\frac{\tau^2}{r^2\chi^2}B(\rho)\right)R(\tau,r)=0,,$$

а при $A(\rho)=\text{const}$, $B(\rho)=\text{const}$, $D(\rho)=\text{const}$ эта функция принимает вид

$$R(\tau,r)=K_{i\tau}(\gamma r),$$

т.е. совпадает с ядром обычного преобразования Конторовича-Лебедева.

Изложенные результаты получены в рамках программы научного сотрудничества между Афинским национальным техническим университетом и Институтом механики НАН Армении и будут использованы в дальнейших совместных научных исследованиях.

Афинский национальный технический университет
Московский институт химического машиностроения

Դ. ՅԱ. ԲԱՐՁՈԿԱՍ, Ա. Ի. ԶՈԲՆԻՆ, Բ. Ա. ԿՈՒԴՐՅԱՎՑԵՎ

Առաձգականության տեսության եզրային խնդիրների լուծման ժամանակ օգտագործվող Կոնտորովիչ-Լեբեդևի տիպի ընդհանրացված ինտեգրալ ձևափոխություն

Առաձգականության տեսության և մաթեմատիկական ֆիզիկայի բազմաթիվ բնագավառներում հանդիպող սեպաձև. համասեռ մարմինների համար եզրային խնդիրների լուծման ժամանակ հաճախ օգտագործվող Կոնտորովիչ-Լեբեդևի հայտնի ինտեգրալ ձևափոխությունը սույն աշխատության մեջ ընդհանրացվում է փոքր պարամետրերով բնութագրվող պարբերական- անհամասեռ մարմինների համար: Այդ նպատակով դիտարկվում է բավականաչափ լայն դասին պատկանող և (0, ∞) միջակայքում որոշված ֆունկցիայի վերլուծությունը փոքր պարամետր պարունակող փոփոխական գործակիցներով երկրորդ կարգի սովորական դիֆերենցիալ հավասարման համար եզրային խնդրի սեփական ֆունկցիաներով: Վերլուծությունը ստանալու ճանապարհին օգտագործվում է Լապլասի ինտեգրալ ձևափոխությունը, դիֆերենցիալ հավասարումների լուծման ասիմպտոտիկ մեթոդները և ինտեգրալների հաշվման կոմպլեքս փոփոխականի ֆունկցիաների տեսության հայտնի մեթոդները:

ЛИТЕРАТУРА – ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՈՒՆ

[1] *М.И.Которович, Н.Н.Лебедев*, ЖЭТФ, т.88, (1938) №10-11, 1192-1206. [2] *Н.Н.Лебедев*, И.П.Скальская, Вопр.мат. физики. Сб. к 75-летию чл.-корр. АН СССР Гринберга Г.А., Л., Наука, с.68-79 (1976). [3] *А.Л.Каламкаров, Б.А.Кудрявцев*, В.З.Партон, ПММ, т.55, вып.6, с.964-971 (1991). [4] *А.Л.Каламкаров, Б.А.Кудрявцев, О.Б.Рудаков*, Инж.-физический журн., т.54, №4, с.487-491 (1993). [5] *А.Л.Каламкаров, Б.А.Кудрявцев, Д.Я.Бардзокас*, Механика комп. материалов, №6, с.1005-1014, (1991). [6] *Я.С.Уфлянд*, Вопр.мат. физики. Сб. к 75-летию чл.-корр. АН СССР Гринберга Г.А., Л., Наука, с.93-105, (1976). [7] *Э.Санчес-Паленсия*, Неоднородные среды и теория колебаний, М., мир, 1984. [8] *Г.Бейтмен, А.Эрдейи*, Высшие трансцендентные функции. Функции Бессела, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены, М., Наука, 1966.