

УДК 539.3

А. Г. Саркисян

**О напряженно-деформированном состоянии анизотропной
 трехслойной полосы**

(Представлено академиком НАН Армении Л.А. Агаловяном 19/V 1997)

1. Рассматривается вопрос определения напряженно-деформированного состояния анизотропной трехслойной полосы длины l и ширины $2h$ ($h \ll l$), верхний и нижний слои которого одинаковы и имеют толщину h_1 и коэффициенты упругости $a_{ij}^{(1)}$, а средний слой имеет толщину $2h_2$ и коэффициенты упругости $a_{ij}^{(2)}$. Предполагается, что на лицевых поверхностях полосы заданы компоненты тензора напряжений

$$\sigma_{xy} = \pm \frac{l}{h} q_x^\pm(x), \quad \sigma_y = \pm q_y^\pm(x) \quad \text{при } y = \pm h, \quad (1.1)$$

а на торцах могут быть заданы различные условия краевых задач теории упругости (рис.1).

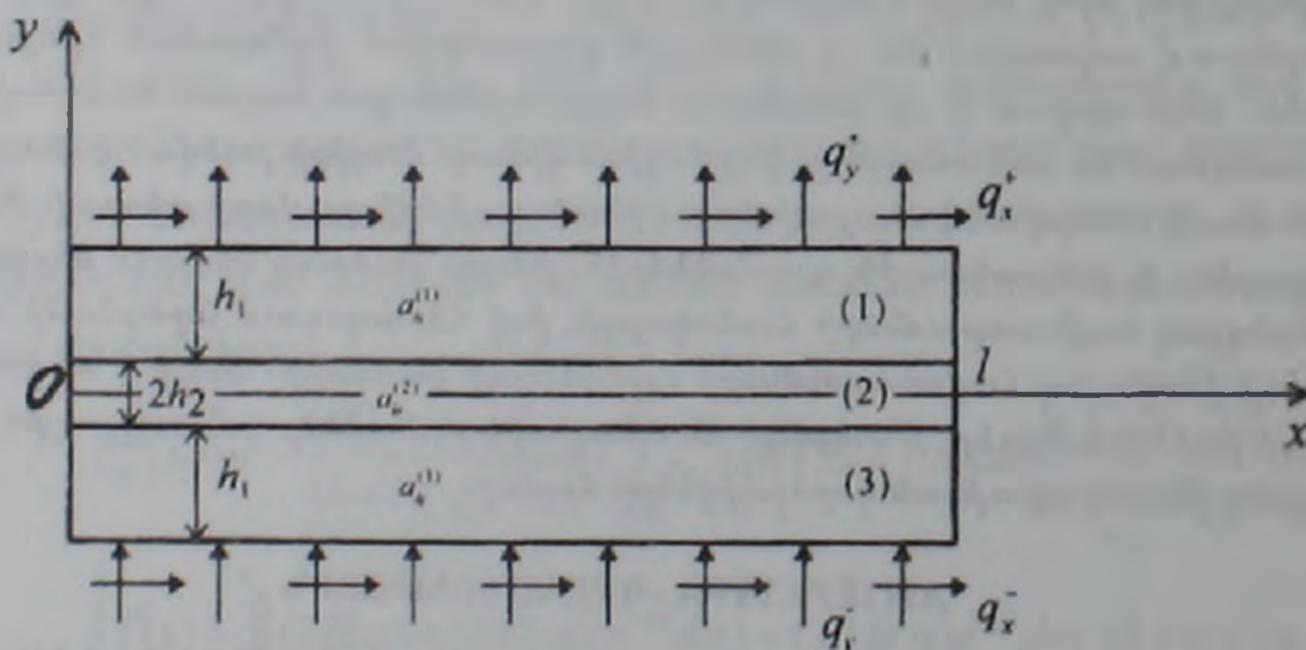


Рис.1

Для решения задачи введем безразмерные координаты и компоненты вектора перемещения $\xi = x/l$, $\zeta = y/h$, $U_k = u_k/l$, $V_k = v_k/l$, а

также малый параметр $\varepsilon = h/l$. Здесь k — номер слоя, u_k и v_k — компоненты вектора перемещения в соответствующем слое.

Задача решается асимптотическим методом. Имеем сингулярно возмущенную относительно малого параметра ε систему уравнений теории упругости для каждого слоя. Как известно, решение такой системы состоит из внутреннего решения и решения типа погранслоя (1-4). Решение внутренней задачи ищется в виде (1.2)

$$\begin{aligned} \sigma_{xk} &= \varepsilon^{-2+s} \sigma_{xk}^{(s)}, \quad \sigma_{xyk} = \varepsilon^{-1+s} \sigma_{xyk}^{(s)}, \quad \sigma_{yk} = \varepsilon^s \sigma_{yk}^{(s)}, \\ U_k &= \varepsilon^{-2+s} U_k^{(s)}, \quad V_k = \varepsilon^{-3+s} V_k^{(s)}, \quad s = \overline{0, N}. \end{aligned} \quad (1.2)$$

После подстановки (1.2) в основные уравнения теории упругости и приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях ε получим систему дифференциальных уравнений относительно коэффициентов представления (1.2), интегрируя которую, для определения компонентов тензора напряжений и безразмерных перемещений будем иметь рекуррентные формулы

$$\begin{aligned} V_k^{(s)} &= v_k^{(s)}(\xi) + v_k^{*(s)}(\xi, \zeta), \quad U_k^{(s)} = -\frac{dv_k^{(s)}}{d\xi} \zeta + u_k^{(s)}(\xi) + u_k^{*(s)}(\xi, \zeta), \\ \sigma_{xk}^{(s)} &= \frac{1}{a_{11}^{(k)}} \left(-\frac{d^2 v_k^{(s)}}{d\xi^2} \zeta + \frac{du_k^{(s)}}{d\xi} \right) + \sigma_{xk}^{*(s)}(\xi, \zeta), \\ \sigma_{xyk}^{(s)} &= \sigma_{xyk0}^{(s)}(\xi) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{a_{11}^{(k)}} \cdot \frac{d^3 v_k^{(s)}}{d\xi^3} \zeta^2 - \frac{1}{a_{11}^{(k)}} \cdot \frac{d^2 u_k^{(s)}}{d\xi^2} \zeta + \sigma_{xyk}^{*(s)}(\xi, \zeta), \\ \sigma_{yk}^{(s)} &= \sigma_{yk0}^{(s)}(\xi) - \frac{d\sigma_{xyk0}^{(s)}}{d\xi} \zeta - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{a_{11}^{(k)}} \cdot \frac{d^4 v_k^{(s)}}{d\xi^4} \zeta^3 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{a_{11}^{(k)}} \cdot \frac{d^3 u_k^{(s)}}{d\xi^3} \zeta^2 + \sigma_{yk}^{*(s)}(\xi, \zeta), \end{aligned} \quad (1.3)$$

где

$$\begin{aligned} v_k^{*(s)} &= \int_0^\zeta \left(a_{12}^{(k)} \sigma_{xk}^{(s-2)} + a_{22}^{(k)} \sigma_{yk}^{(s-4)} + a_{26}^{(k)} \sigma_{xyk}^{(s-3)} \right) d\zeta, \\ u_k^{*(s)} &= \int_0^\zeta \left(a_{16}^{(k)} \sigma_{xk}^{(s-1)} + a_{26}^{(k)} \sigma_{yk}^{(s-3)} + a_{66}^{(k)} \sigma_{xyk}^{(s-2)} - \frac{\partial v_k^{*(s)}}{\partial \xi} \right) d\zeta, \\ \sigma_{xk}^{*(s)} &= \frac{1}{a_{11}^{(k)}} \left(-a_{12}^{(k)} \sigma_{yk}^{(s-3)} - a_{16}^{(k)} \sigma_{xyk}^{(s-1)} + \frac{\partial u_k^{*(s)}}{\partial \xi} \right), \\ \sigma_{xyk}^{*(s)} &= -\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\int_0^\zeta \sigma_{xk}^{*(s)} d\zeta \right), \quad \sigma_{yk}^{*(s)} = -\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\int_0^\zeta \sigma_{xyk}^{*(s)} d\zeta \right), \end{aligned} \quad (1.4)$$

$Q^{(s)} = 0$ при $s < 0$ (Q – любое из напряжений и безразмерных перемещений), $k=1$ для $\zeta_0 \leq \zeta \leq 1$, $k=2$ для $-\zeta_0 \leq \zeta \leq \zeta_0$ и $k=3$ для $-1 \leq \zeta \leq -\zeta_0$ ($\zeta_0 = h_2 / h$), $a_{ij}^{(1)} = a_{ij}^{(3)}$.

$u_k^{(s)}$, $v_k^{(s)}$, $\sigma_{xyk}^{(s)}$, $\sigma_{y1k}^{(s)}$ – 12 неизвестных функций от ξ , определяемых из граничных условий (1.1) и условий контакта слоев

$$u_1 = u_2, v_1 = v_2, \sigma_{xy1} = \sigma_{xy2}, \sigma_{y1} = \sigma_{y2} \text{ при } y = h_2, \quad (1.5)$$

$$u_2 = u_3, v_2 = v_3, \sigma_{xy2} = \sigma_{xy3}, \sigma_{y2} = \sigma_{y3} \text{ при } y = -h_2. \quad (1.6)$$

После удовлетворения условиям (1.1), (1.5), (1.6) все величины выражаются через функции $u_2^{(s)}$ и $v_2^{(s)}$:

$$u_1^{(s)} = u_2^{(s)} + \zeta_0 \frac{dV^{+(s)}}{d\xi} + U^{+(s)}, \quad v_1^{(s)} = v_2^{(s)} + V^{+(s)},$$

$$u_3^{(s)} = u_2^{(s)} - \zeta_0 \frac{dV^{-(s)}}{d\xi} + U^{-(s)}, \quad v_3^{(s)} = v_2^{(s)} + V^{-(s)},$$

$$\sigma_{xy10}^{(s)} = q_x^{+(s)} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{a_{11}^{(1)}} \cdot \frac{d^3 v_2^{(s)}}{d\xi^3} + \frac{1}{a_{11}^{(1)}} \cdot \frac{d^2 u_2^{(s)}}{d\xi^2} - \frac{1}{2} (1 - 2\zeta_0) \frac{1}{a_{11}^{(1)}} \cdot \frac{d^3 V^{+(s)}}{d\xi^3} +$$

$$+ \frac{1}{a_{11}^{(1)}} \cdot \frac{d^2 U^{+(s)}}{d\xi^2} - \sigma_{xy1}^{*(s)}(\zeta = 1),$$

$$\sigma_{y10}^{(s)} = q_y^{+(s)} + \frac{dq_x^{+(s)}}{d\xi} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{a_{11}^{(1)}} \cdot \frac{d^4 v_2^{(s)}}{d\xi^4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{a_{11}^{(1)}} \cdot \frac{d^3 u_2^{(s)}}{d\xi^3} -$$

$$- \frac{1}{6} (2 - 3\zeta_0) \frac{1}{a_{11}^{(1)}} \cdot \frac{d^4 V^{+(s)}}{d\xi^4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{a_{11}^{(1)}} \cdot \frac{d^3 U^{+(s)}}{d\xi^3} - \frac{d}{d\xi} (\sigma_{xy1}^{*(s)}(\zeta = 1)) - \sigma_{y1}^{*(s)}(\zeta = 1),$$

$$\sigma_{xy20}^{(s)} = \frac{1}{2} (q_x^{+(s)} - q_x^{-(s)}) - \frac{1}{2} \left(\frac{1 - \zeta_0^2}{a_{11}^{(1)}} + \frac{\zeta_0^2}{a_{11}^{(2)}} \right) \frac{d^3 v_2^{(s)}}{d\xi^3} - \frac{1}{4} (1 - \zeta_0)^2 \frac{1}{a_{11}^{(1)}} \cdot$$

$$\cdot \frac{d^3}{d\xi^3} (V^{+(s)} + V^{-(s)}) + \frac{1}{2} (1 - \zeta_0) \frac{1}{a_{11}^{(1)}} \cdot \frac{d^2}{d\xi^2} (U^{+(s)} + U^{-(s)}) -$$

$$- \frac{1}{2} [\sigma_{xy1}^{*(s)}(\zeta = 1) - \sigma_{xy1}^{*(s)}(\zeta = \zeta_0) + \sigma_{xy2}^{*(s)}(\zeta = \zeta_0) +$$

$$+ \sigma_{xy2}^{*(s)}(\zeta = -\zeta_0) - \sigma_{xy3}^{*(s)}(\zeta = -\zeta_0) + \sigma_{xy3}^{*(s)}(\zeta = -1)],$$

$$\sigma_{y20}^{(s)} = \frac{1}{2} (q_y^{+(s)} - q_y^{-(s)}) + \frac{1}{2} (1 - \zeta_0) \frac{d}{d\xi} (q_x^{+(s)} + q_x^{-(s)}) +$$

$$+ \frac{1}{2} \left(\frac{(1 - \zeta_0)^2}{a_{11}^{(1)}} - \frac{\zeta_0^2}{a_{11}^{(2)}} \right) \frac{d^3 u_2^{(s)}}{d\xi^3} - \frac{1}{6} (1 - \zeta_0)^3 \frac{1}{a_{11}^{(1)}} \frac{d^4}{d\xi^4} (V^{+(s)} - V^{-(s)}) +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{4}(1-\zeta_0)^2 \frac{1}{a_{11}^{(1)}} \cdot \frac{d^3}{d\xi^3} (U^{+(s)} + U^{-(s)}) - \frac{1}{2}(1-\zeta_0) \frac{d}{d\xi} [\sigma_{xy1}^{*(s)}(\zeta=1) - \\
& - \sigma_{xy3}^{*(s)}(\zeta=-1)] - \frac{1}{2} [\sigma_{y1}^{*(s)}(\zeta=1) - \sigma_{y1}^{*(s)}(\zeta=\zeta_0) + \sigma_{y2}^{*(s)}(\zeta=\zeta_0) + \\
& + \sigma_{y2}^{*(s)}(\zeta=-\zeta_0) - \sigma_{y3}^{*(s)}(\zeta=-\zeta_0) + \sigma_{y3}^{*(s)}(\zeta=-1)], \quad (1.7)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{xy30}^{(s)} = & -q_x^{-(s)} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{a_{11}^{(1)}} \cdot \frac{d^3 v_2^{(s)}}{d\xi^3} - \frac{1}{a_{11}^{(1)}} \cdot \frac{d^2 u_2^{(s)}}{d\xi^2} - \frac{1}{2}(1-2\zeta_0) \frac{1}{a_{11}^{(1)}} \cdot \frac{d^3 V^{-(s)}}{d\xi^3} - \\
& - \frac{1}{a_{11}^{(1)}} \cdot \frac{d^2 U^{-(s)}}{d\xi^2} - \sigma_{xy3}^{*(s)}(\zeta=-1),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{y30}^{(s)} = & -q_y^{-(s)} + \frac{dq_x^{-(s)}}{d\xi} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{a_{11}^{(1)}} \cdot \frac{d^4 v_2^{(s)}}{d\xi^4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{a_{11}^{(1)}} \cdot \frac{d^3 u_2^{(s)}}{d\xi^3} + \frac{1}{6}(2-3\zeta_0) \frac{1}{a_{11}^{(1)}} \cdot \\
& \cdot \frac{d^4 V^{-(s)}}{d\xi^4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{a_{11}^{(1)}} \cdot \frac{d^3 U^{-(s)}}{d\xi^3} + \frac{d}{d\xi} (\sigma_{xy3}^{*(s)}(\zeta=-1)) - \sigma_{y3}^{*(s)}(\zeta=-1),
\end{aligned}$$

где

$$U^{+(s)} = u_2^{*(s)}(\zeta = \zeta_0) - u_1^{*(s)}(\zeta = \zeta_0), \quad U^{-(s)} = u_2^{*(s)}(\zeta = -\zeta_0) - u_3^{*(s)}(\zeta = -\zeta_0),$$

$$V^{+(s)} = v_2^{*(s)}(\zeta = \zeta_0) - v_1^{*(s)}(\zeta = \zeta_0), \quad V^{-(s)} = v_2^{*(s)}(\zeta = -\zeta_0) - v_3^{*(s)}(\zeta = -\zeta_0),$$

$$q_x^{\pm(0)} = q_x^{\pm}, \quad q_y^{\pm(0)} = q_y^{\pm}, \quad q_x^{\pm(s)} = q_y^{\pm(s)} = 0, \quad s \neq 0,$$

а для определения $u_2^{(s)}$ и $v_2^{(s)}$ получаются следующие уравнения:

$$2 \left(\frac{1-\zeta_0}{a_{11}^{(1)}} + \frac{\zeta_0}{a_{11}^{(2)}} \right) \frac{d^2 u_2^{(s)}}{d\xi^2} = F_1^{(s)}, \quad \frac{2}{3} \left(\frac{1-\zeta_0^3}{a_{11}^{(1)}} + \frac{\zeta_0^3}{a_{11}^{(2)}} \right) \frac{d^4 v_2^{(s)}}{d\xi^4} = F_2^{(s)}, \quad (1.8)$$

$$F_1^{(s)}(\xi) = -(q_x^{+(s)} + q_x^{-(s)}) + \frac{1}{2}(1-\zeta_0)^2 \frac{1}{a_{11}^{(1)}} \cdot \frac{d^3}{d\xi^3} (V^{+(s)} - V^{-(s)}) -$$

$$-(1-\zeta_0) \frac{1}{a_{11}^{(1)}} \cdot \frac{d^2}{d\xi^2} (U^{+(s)} + U^{-(s)}) + \sigma_{y1}^{*(s)}(\zeta=1) - \sigma_{y1}^{*(s)}(\zeta=\zeta_0) + \sigma_{y2}^{*(s)}(\zeta=\zeta_0) -$$

$$- \sigma_{y2}^{*(s)}(\zeta=-\zeta_0) + \sigma_{y3}^{*(s)}(\zeta=-\zeta_0) - \sigma_{y3}^{*(s)}(\zeta=-1),$$

$$F_2^{(s)}(\xi) = q_y^{+(s)} + q_y^{-(s)} + \frac{d}{d\xi} (q_x^{+(s)} - q_x^{-(s)}) - \frac{1}{6}(1-\zeta_0)^2 (2+\zeta_0) \frac{1}{a_{11}^{(1)}} \times$$

$$\times \frac{d^4}{d\xi^4} (V^{+(s)} - V^{-(s)}) + \frac{1}{2}(1-\zeta_0^2) \frac{1}{a_{11}^{(1)}} \cdot \frac{d^3}{d\xi^3} (U^{+(s)} - U^{-(s)}) -$$

$$\begin{aligned}
& -\zeta_0 \frac{d}{d\xi} [\sigma_{xy2}^{*(s)}(\zeta = \zeta_0) - \sigma_{xy1}^{*(s)}(\zeta = \zeta_0) + \sigma_{xy2}^{*(s)}(\zeta = -\zeta_0) - \sigma_{xy3}^{*(s)}(\zeta = -\zeta_0)] - \\
& -\frac{d}{d\xi} [\sigma_{xy1}^{*(s)}(\zeta = 1) + \sigma_{xy3}^{*(s)}(\zeta = -1)] - [\sigma_{y1}^{*(s)}(\zeta = 1) - \sigma_{y1}^{*(s)}(\zeta = \zeta_0) + \\
& + \sigma_{y2}^{*(s)}(\zeta = \zeta_0) - \sigma_{y2}^{*(s)}(\zeta = -\zeta_0) + \sigma_{y3}^{*(s)}(\zeta = -\zeta_0) - \sigma_{y3}^{*(s)}(\zeta = -1)] .
\end{aligned}$$

Произвольные постоянные, появляющиеся при интегрировании уравнений (1.8), определяются из условий на торцах $\xi = 0$ и $\xi = 1$. При определении внутреннего напряженно-деформированного состояния этим условиям можно удовлетворить в интегральной форме.

Из полученного общего решения, варьируя толщинами слоев и упругими характеристиками, можно получить решения для тонких прослоек и тонких включений.

2. В качестве приложения полученных результатов рассмотрим две задачи.

1. Трехслойная балка заделана одним концом, а средний слой растягивается силой P (рис.2).

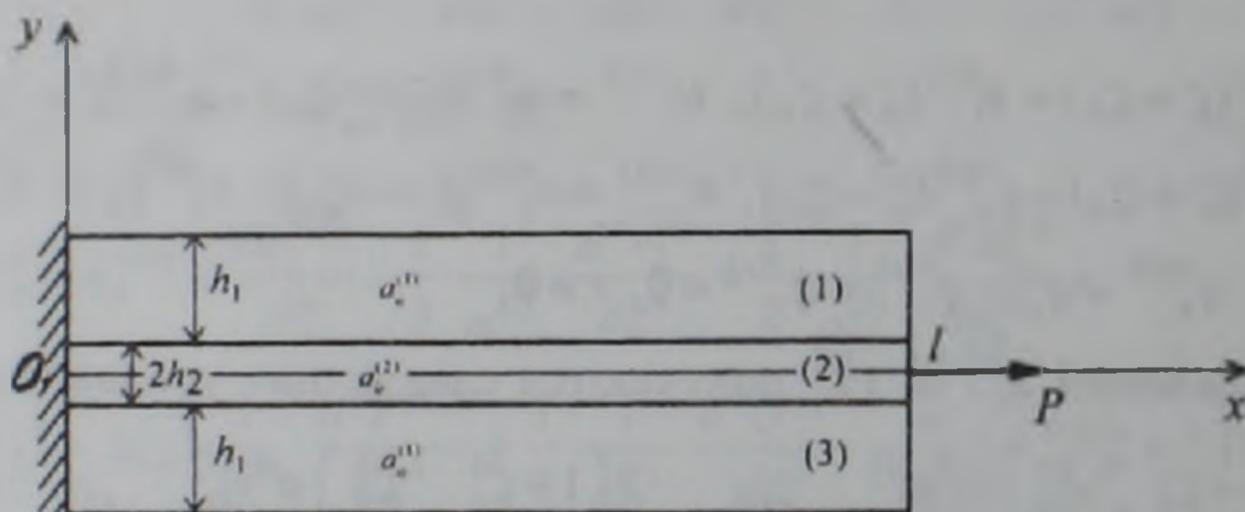


Рис.2

Для определения компонентов тензора напряжений и вектора перемещения для каждого слоя используем решение системы (1.8) и соотношения (1.3), (1.4) и (1.7). Постоянные интегрирования, характеризующие жесткое смещение, определяем из условий закрепления центра сечения $x=0$ и отсутствия вращения вокруг оси, проходящей через эту точку перпендикулярно к плоскости полосы:

$$u_2(0,0) = 0, \quad v_2(0,0) = 0, \quad \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) \Big|_{\substack{x=0 \\ y=0}} = 0.$$

Остальные же постоянные определяем из записанных в интегральной форме условий на торце $x=l$, что основывается на очень важном свойстве решения пограничного слоя о самоуравновешенности по

высоте полосы напряжений погранслоя $\sigma_{xp}, \sigma_{xyp}$ в произвольном сечении $x = x_k$ (2.4):

$$\int_{-(h_1+h_2)}^{h_1+h_2} \sigma_{xp} dy = 0, \quad \int_{-(h_1+h_2)}^{h_1+h_2} y \sigma_{xp} dy = 0, \quad \int_{-(h_1+h_2)}^{h_1+h_2} \sigma_{xyp} dy = 0.$$

Отметим, что приближения $s=0,1,2$ дают точное решение:

$$\sigma_{x1} = \frac{P}{2h} \cdot \frac{B}{a_{11}^{(1)}}, \quad \sigma_{xy1} = 0, \quad \sigma_{y1} = 0, \quad (h_2 \leq y \leq h_1 + h_2)$$

$$u_1 = \frac{P}{2h} Bx + \frac{P}{4h} B \left[2(y - h_2) \frac{a_{16}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} - (y - 2h_2) \frac{a_{16}^{(2)}}{a_{11}^{(2)}} \right], \quad (2.1)$$

$$v_1 = \frac{P}{4h} Bx \frac{a_{16}^{(2)}}{a_{11}^{(2)}} + \frac{P}{2h} B \left[(y - h_2) \frac{a_{12}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} + h_2 \frac{a_{12}^{(2)}}{a_{11}^{(2)}} \right],$$

$$\sigma_{x2} = \frac{P}{2h} \cdot \frac{B}{a_{11}^{(2)}}, \quad \sigma_{xy2} = 0, \quad \sigma_{y2} = 0, \quad (-h_2 \leq y \leq h_2)$$

$$u_2 = \frac{P}{2h} Bx + \frac{P}{4h} By \frac{a_{16}^{(2)}}{a_{11}^{(2)}}, \quad (2.2)$$

$$v_2 = \frac{P}{4h} Bx \frac{a_{16}^{(2)}}{a_{11}^{(2)}} + \frac{P}{2h} By \frac{a_{12}^{(2)}}{a_{11}^{(2)}},$$

$$\sigma_{x3} = \frac{P}{2h} \cdot \frac{B}{a_{11}^{(1)}}, \quad \sigma_{xy3} = 0, \quad \sigma_{y3} = 0, \quad (-(h_1 + h_2) \leq y \leq -h_2)$$

$$u_3 = \frac{P}{2h} Bx + \frac{P}{4h} B \left[2(y + h_2) \frac{a_{16}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} - (y + 2h_2) \frac{a_{16}^{(2)}}{a_{11}^{(2)}} \right], \quad (2.3)$$

$$v_3 = \frac{P}{4h} Bx \frac{a_{16}^{(2)}}{a_{11}^{(2)}} + \frac{P}{2h} B \left[(y + h_2) \frac{a_{12}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} - h_2 \frac{a_{12}^{(2)}}{a_{11}^{(2)}} \right].$$

Здесь $B = \left(\frac{1 - \zeta_0}{a_{11}^{(1)}} + \frac{\zeta_0}{a_{11}^{(2)}} \right)^{-1}$, $\zeta_0 = h_2 / h$, $h = h_1 + h_2$.

Решение (2.1)-(2.3) является точным решением поставленной задачи вне зоны влияния решений погранслоя. Оно удовлетворяет всем уравнениям теории упругости (уравнения равновесия, соотношения состояния — обобщенный закон Гука, соотношения деформации-перемещения), граничным условиям при $y = \pm h$ и условиям контакта слоев (1.5) и (1.6). Условия же при $x=l$ удовлетворяются интегрально.

Из (2.1) видно, что отлично от нуля только нормальное напряжение σ_x , постоянное для каждого слоя. Согласно формулам (2.1)-(2.3),

$$\frac{\sigma_{x1}}{\sigma_{x2}} = \frac{a_{12}^{(2)}}{a_{11}^{(1)}}, \quad \sigma_{x3} = \sigma_{x1}.$$

В частности, если материалом первого и третьего слоев является сталь ($E_{ст} = 1,96078 \cdot 10^{11}$ Па), а среднего слоя — эпоксид ($E_{эп} = 2,94118 \cdot 10^9$ Па), то

$$\frac{\sigma_{x1}}{\sigma_{x2}} = \frac{E_{ст}}{E_{эп}} = 66,7.$$

На рис.3 приведено распределение напряжений по толщине для трехслойной полосы.

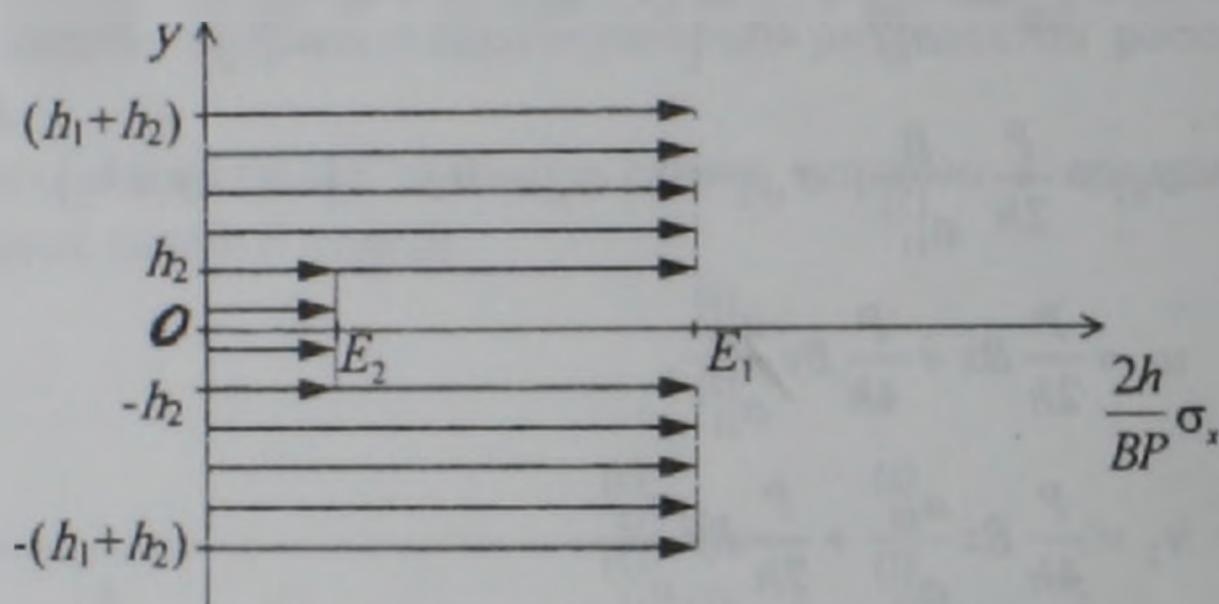


Рис.3

В рассмотренной задаче тангенциальное напряжение отсутствует. Оно отсутствует и тогда, когда имеем двухслойную полосу с тонкой прослойкой, растягиваемой силой P . Полученный результат интересен тем, что в известных моделях контактных задач для полос с тонкими прослойками предполагается наличие контактных тангенциальных напряжений, под действием которых прослойка растягивается, ведя себя как обыкновенный стержень (6,7). Из полученного точного решения внутренней задачи следует, что в действительности картина иная, поскольку касательное напряжение вообще отсутствует. Вблизи торцов же имеется зона погранслоя, где все напряжения практически равноправны (2,5). Таким образом, на основе полученных результатов можно сделать вывод о некорректности модели одноосного напряженного состояния стрингера, где главную роль играют касательные напряжения.

2. Трехслойная балка одним концом заделана, а на лицевую поверхность верхнего слоя действует тангенциальная нагрузка постоянной интенсивности:

$$\sigma_{xy1} = \varepsilon^{-1} q' = q \quad (q = \text{const}) \quad \text{при } y=h.$$

Во избежание громоздкости приводимых формул рассмотрим случай ортотропных слоев, т.е. примем $a_{16}^{(1)} = a_{26}^{(1)} = a_{16}^{(2)} = a_{26}^{(2)} = 0$.

Приближения $\nu=0,1,2$ дают точное решение. В частности, для напряжений имеем

$$\begin{aligned} \sigma_{x1} &= \frac{q}{2}(1-\xi)(B_1 + 3B_2\xi) \frac{1}{a_{11}^{(1)}} \varepsilon^{-1} = \frac{q}{2h^2}(1-x)(B_1h + 3B_2y) \frac{1}{a_{11}^{(1)}}, \quad (\zeta_0 \leq \zeta \leq 1) \\ \sigma_{xy1} &= \frac{q}{4} \left[4 - (1-\zeta)(2B_1 + 3B_2(1+\zeta)) \frac{1}{a_{11}^{(1)}} \right] = \\ &= \frac{q}{4h^2} \left[4h^2 - (h-y)(2B_1h + 3B_2(h+y)) \frac{1}{a_{11}^{(1)}} \right], \quad \sigma_{y1} = 0 \\ \sigma_{x2} &= \frac{q}{2}(1-\xi)(B_1 + 3B_2\xi) \frac{1}{a_{11}^{(2)}} \varepsilon^{-1} = \frac{q}{2h^2}(1-x)(B_1h + 3B_2y) \frac{1}{a_{11}^{(2)}}, \quad (-\zeta_0 \leq \zeta \leq \zeta_0) \\ \sigma_{xy2} &= \frac{q}{4} \left[2 - 3B_2 \left(\frac{1-\zeta_0^2}{a_{11}^{(1)}} + \frac{\zeta_0^2 - \zeta^2}{a_{11}^{(2)}} \right) + 2B_1\zeta \frac{1}{a_{11}^{(2)}} \right] = \\ &= \frac{q}{4h^2} \left[2h^2 - 3B_2 \left(\frac{h^2 - h_2^2}{a_{11}^{(1)}} + \frac{h_2^2 - y^2}{a_{11}^{(2)}} \right) + 2B_1hy \frac{1}{a_{11}^{(2)}} \right], \quad \sigma_{y2} = 0 \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{x3} &= \frac{q}{2}(1-\xi)(B_1 + 3B_2\xi) \frac{1}{a_{11}^{(1)}} \varepsilon^{-1} = \frac{q}{2h^2}(1-x)(B_1h + 3B_2y) \frac{1}{a_{11}^{(1)}}, \quad (-1 \leq \zeta \leq -\zeta_0) \\ \sigma_{xy3} &= \frac{q}{4}(1+\zeta)(2B_1 - 3B_2(1-\zeta)) \frac{1}{a_{11}^{(1)}} = \frac{q}{4h^2}(h+y)(2B_1h - 3B_2(h-y)) \frac{1}{a_{11}^{(1)}}, \quad \sigma_{y3} = 0, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} B_1 &= \left(\frac{1-\zeta_0}{a_{11}^{(1)}} + \frac{\zeta_0}{a_{11}^{(2)}} \right)^{-1} = h \left(\frac{h-h_2}{a_{11}^{(1)}} + \frac{h_2}{a_{11}^{(2)}} \right)^{-1}, \\ B_2 &= \left(\frac{1-\zeta_0^3}{a_{11}^{(1)}} + \frac{\zeta_0^3}{a_{11}^{(2)}} \right)^{-1} = h^3 \left(\frac{h^3 - h_2^3}{a_{11}^{(1)}} + \frac{h_2^3}{a_{11}^{(2)}} \right)^{-1}. \end{aligned}$$

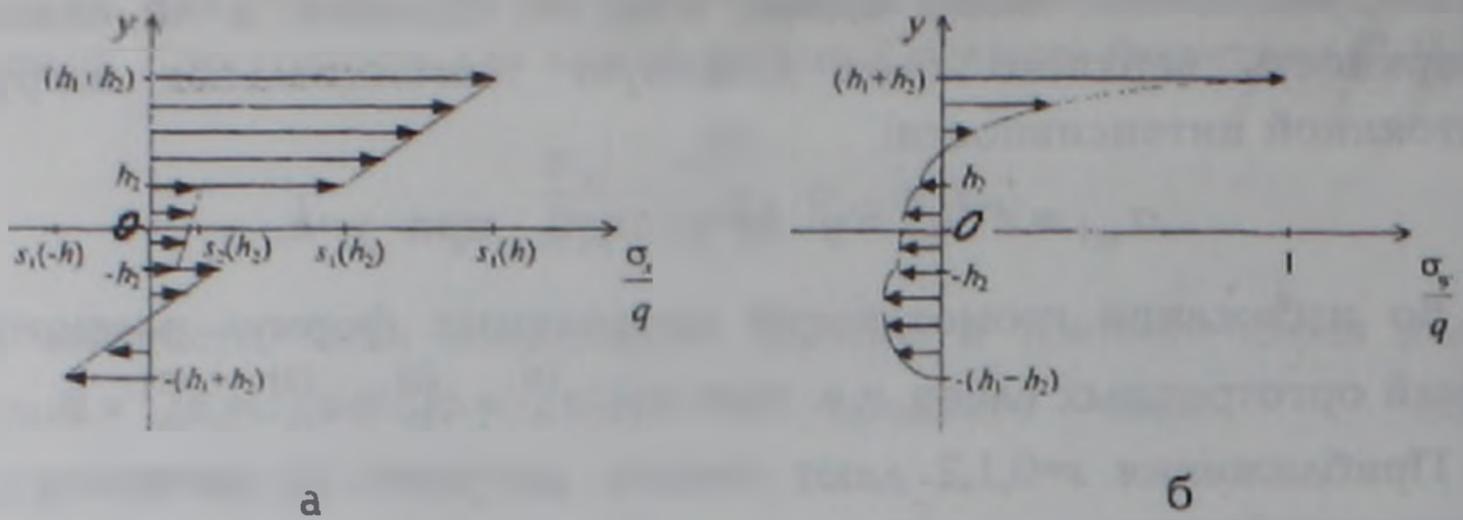


Рис.4

На рис.4 а,б приведены графики напряжений σ_x и σ_{xy} в произвольном сечении $x = x_k \neq l$ ($s_m(y) = (1 - x_k)(B_1 h + 3B_2 y)E_m / (2h^2)$, $m = 1,2$).

Из решения (2.4) следует, что, если трехслойная полоса загружена на лицевой поверхности тангенциальными силами, то на линиях контакта возникают касательные напряжения, однако они порядком меньше нормального напряжения σ_x .

Автор выражает благодарность академику НАН РА Л.А.Агаловяну за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

Институт механики НАН Армении

Ա. Հ. ՍԱՐԳՍՅԱՆ

Անիզոտրոպ եռաշերտի լարվածա-դեֆորմացիոն վիճակի մասին

Դիտարկված է անիզոտրոպ եռաշերտի լարվածա-դեֆորմացիոն վիճակի որոշման հարցը. երբ նրա երեսային մակերևույթների վրա տրված են լարման տենզորի բաղադրիչները: Կառուցված է խնդրի ասիմպտոտիկ լուծումը: Ուսումնասիրված է եռաշերտի լարվածա-դեֆորմացիոն վիճակը տարբեր բռնավորումների դեպքում: Քննարկված է բարակ ներդրակներով շերտերի մոդելների կիրառելիությունը:

ЛИТЕРАТУРА -ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ А.Л.Гольденвейзер, ПММ, т.26, №4 (1962).
- ² Л.А.Агаловян, Изв. АН Арм.ССР, Механика, т.30, №5 (1977).
- ³ Л.А.Агаловян, А.М.Хачатрян, Изв. АН Арм.ССР, Механика, т.39, №2 (1986).
- ⁴ А.Б.Васильев, В.Ф.Бутузов, Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений, М., Наука, 1973.
- ⁵ А.М.Хачатрян, Изв. АН Арм.ССР, Механика, т.40, №2 (1987).
- ⁶ E.Melan, Ingenieur Archiv, Bd.3, Heft 2 (1932).
- ⁷ Р.Муки, Е.Стернберг, Прикл. механика, Тр. Амер. О-ва инженеров-механиков, т.35, сер. Е, №4 (1968).