

ФИЗИКА

УДК 5.44

А. Ж. Хачатрян

**Рассеяние электрона на конечной цепочке
из произвольных короткодействующих потенциалов**

(Представлено академиком НАН Армении Д.М.Седракяном 26/III 1996)

Рассмотрим одномерную задачу движения электрона в поле потенциала

$$V(x) = \sum_{i=1}^N V_i \delta(x - x_i), \quad (1)$$

где V_i , x_i — произвольные величины.

Пусть решение уравнения Шредингера вне потенциала (1) имеет вид ($\hbar = 1$, $2m_0 = 1$ — масса электрона):

$$\psi(x, k) = e^{ikx} + r(k)e^{-ikx}, \quad \text{при } x < x_1; \quad (2)$$

$$\psi(x, k) = t(k)e^{ikx}, \quad \text{при } x > x_N.$$

Здесь $E = k^2$ — энергия электрона, $r(k)$ и $t(k)$ соответственно амплитуды коэффициентов отражения и прохождения электрона.

Как было показано в работе (1), если рассматривать данную задачу в терминах функций Грина (ФГ), то решение соответствующего уравнения Шредингера для ФГ электрона, в частности, слева от барьера будет иметь вид

$$G(x, x', k) = G_0(x, x', k) - r(k) \frac{G_0(x, x_1, k) G_0(x_1, x', k)}{G_0(x_1, x_1)}, \quad \text{при } x, x' < x_1. \quad (3)$$

В (3) $G_0(x, x', k)$ — ФГ свободного электрона. Здесь, как и в случае решения волнового уравнения (2), величина $r(k)$ является амплитудой коэффициента отражения электронного пучка единичной интенсивности и энергии $E = k^2$.

Уравнение Шредингера для ФГ электрона в поле (1) имеет вид

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \sum_{l=1}^N V_l \delta(x - x_l) - k^2\right) G(x, x', k) = \delta(x - x'). \quad (4)$$

Как известно, решение уравнения (4) вне зависимости от вида потенциальной энергии электрона равносильно решению интегрального уравнения Дайсона (см. например (2)):

$$G(x, x') + \int dx'' G_0(x, x'') V(x'') G(x'', x') = G_0(x, x'), \quad (5)$$

где $V(x)$ — потенциальная энергия электрона.

Как мы покажем, решение уравнения (5) и использование (3) в случае $V(x)$ вида (1), позволяет определить амплитуду коэффициента отражения электрона $r(k)$ для любых значений параметров V_l, x_l ($l = 1, 2, \dots, N$) и E .

Для потенциала (1) уравнение (5) записывается

$$G(x, x') + \sum_{l=1}^N V_l G_0(x, x_l) G(x_l, x') = G_0(x, x'). \quad (6)$$

Решая уравнение (6) при $x = x_p$ ($p = 1, 2, \dots, N$), для неизвестных $G(x_l, x')$ ($l = 1, 2, \dots, N$) получим

$$G(x_l, x') = \frac{\det \hat{A}_{Nl}}{\det \hat{D}_N}, \quad (7)$$

где символ $\det$ означает детерминант соответствующей матрицы. Здесь матрица $\hat{D}_N$ имеет вид

$$\hat{D}_N = (\delta_{pl} + V_l G_0(x_l, x_p)); \quad l, p = 1, 2, \dots, N. \quad (8)$$

Матрица $\hat{A}_{Nl}$ получается из матрицы $\hat{D}_N$ (8) заменой l -ого столбца на столбец

$$\begin{pmatrix} G_0(x_1, x') \\ G_0(x_2, x') \\ \dots \\ G_0(x_N, x') \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Вводя обозначения

$$A_{Nl} = \det \hat{A}_{Nl} \quad \text{и} \quad \hat{D}_N = \det \hat{D}_N \quad (10)$$

и подставляя (7) в (6), получим ФГ электрона в поле (1)

$$G(x, x') = G_0(x, x') - \frac{1}{\hat{D}_N} \sum_{l=1}^N V_l G_0(x, x_l) A_{Nl}. \quad (11)$$

Полученное решение (11) удовлетворяет уравнению (4) на всей числовой оси, т.е. $-\infty < x, x' < \infty$. К сожалению для произвольных x и x' дальнейшее упрощение выражения (14) не представляется возможным. Однако, если интересоваться ФГ только в определенной области, т.е. x и x' меняются в пределах рассматриваемой области, то соответствующие упрощения (14), как мы покажем ниже, возможны.

Как отмечалось выше, для определения амплитуды коэффициента отражения r достаточно только знание ФГ левее от потенциала (1). Поэтому будем рассматривать полученное решение ФГ (11) в случае $x, x' < x_1$.

Для преобразования (11) воспользуемся связью между ФГ с одното-чечной ФГ, найденной в работе (3),

$$G(x, x') = \{G(x, x')G_0(x', x')\}^{1/2} \lambda_{x, x'}, \quad (12)$$

где

$$\lambda_{x, x'} = \exp \left\{ - \int_{\min(x, x')}^{\max(x, x')} \frac{dy}{2G_0(y, y)} \right\}. \quad (12a)$$

Используя (12), решение ФГ (11), при $x, x' < x_1$, можно преобразовать к виду

$$G(x, x') = G_0(x, x') - \frac{1}{D_N} \sum_{l=1}^N V_l \frac{G_0(x_l, x_1)}{G_0(x_1, x_1)} \tilde{A}_N \frac{G_0(x, x_1)G_0(x_1, x')}{G_0(x_1, x_1)}. \quad (13)$$

В (18) $\tilde{A}_N$ получается из A_N (10) при $x' = x_1$. Сравнивая (13) с (3), получим амплитуду коэффициента отражения электрона

$$r(k) = \frac{1}{D_N} \sum_{l=1}^N V_l \frac{G_0(x_l, x_1)}{G_0(x_1, x_1)} \tilde{A}_N. \quad (14)$$

Выражение (14) можно представить в более удобной форме

$$r(k) = -\tilde{D}_{N+1} / D_N. \quad (15)$$

В (15) $\tilde{D}_{N+1}$ детерминант матрицы $\hat{\tilde{D}}_{N+1}$

$$\begin{aligned} (\hat{\tilde{D}}_{N+1})_{p+1, p+1} &= (\hat{D}_N) \quad ; \quad (\hat{\tilde{D}}_{N+1})_{1,1} = 0 \\ (\hat{\tilde{D}}_{N+1})_{p+1,1} &= G_0(x_p, x_1) \quad ; \quad (\hat{\tilde{D}}_{N+1})_{1, p+1} = \frac{V_l G_0(x_l, x_1)}{G_0(x_1, x_1)}, \end{aligned} \quad (16)$$

$$n, p = 1, 2, \dots, N.$$

Таким образом, нам удалось представить амплитуду коэффициента отражения электрона $r(k)$ от потенциала (1) в виде отношения детерминантов двух матриц $\tilde{D}_{N+1}$, D_N .

Заметим, что между детерминантами $\tilde{D}_{N+1}$ и D_N существует связь.

$$\tilde{D}_{N+1} = \frac{1 - V_1 G_0(x_1, x_1)}{V_1 G_0(x_1, x_1)} D_N - \frac{D_{N-1}}{V_1 G_0(x_1, x_1)}. \quad (17)$$

Из (17) следует, что $r(k)$ можно также представить в виде

$$r(k) = 1 - \tilde{A}_{N1} / (G_0(x_1, x_1) \cdot D_N r(k)). \quad (18)$$

Используя (17), (18), для коэффициента отражения электрона R получим следующую формулу:

$$R = r(k)r^*(k) = 1 - |D_N|^{-2}, \quad (19)$$

где D_N есть детерминант матрицы (8). При получении (19) мы учли, что ФГ $G_0(x, x')$ свободного электрона чисто мнимая, т.е.

$$G_0(x, x) = -G_0^*(x, x). \quad (20)$$

Использованные нами свойства ФГ $G_0(x, x')$ (12) и (20) для получения (19) верны и в случае ФГ электрона, движущегося в поле некоторого регулярного потенциала (4). Поэтому (19) можно также рассматривать как коэффициент отражения электрона от потенциала (1), при наличии некоторого дополнительного поля $U(x)$. В этом случае $G_0(x, x')$ в D_N (8) определяется из уравнения

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2} + U(x) \right) G_0(x, x') = \delta(x - x').$$

В конце отметим, что результаты (15) и (19) были получены в работах В. М. Гаспаряна, Б. Л. Альтшулера, А. Г. Аронова и З. А. Касаманяна, методом последовательной сшивки ФГ на δ -потенциалах (5,6).

Выражаю признательность В. М. Гаспаряну за постановку задачи и внимание при выполнении данной работы, а также академику НАН Армении Д. М. Седракяну и Д. А. Бадалянну за обсуждение полученных результатов.

Выполнение данной работы во многом стало возможным благодаря гранту № MVL000 от Международного научного фонда.

Армянский инженерный государственный университет

Ա. Ժ. ԽԱՉԱՏՐՅԱՆ

Էլեկտրոնի ցրումը կամայական կարճ ազդող պոտենցիալներից բաղկացած վերջավոր շղթայի վրա

Աշխատանքում դիտարկվում է էլեկտրոնի միաչափ շարժումը վերջավոր քանակի δ -պոտենցիալներից բաղկացած ցանցի դաշտում: Գտնված է Շրեդինգերի Գրինի ֆունկցիայի համար հավասարման ճշգրիտ լուծումը: Ցույց է տրված, որ պոտենցիալի պարամետրերի կամայական արժեքների համար էլեկտրոնի անցման գործակիցը կարելի է ներկայացնել որոշակի մատրիցի դետերմինանտի միջոցով: Ստացված արդյունքները ընդհանրացված են նաև արտաքին դաշտի առկայությամբ դեպքի համար:

ЛИТЕРАТУРА-ՓՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ З. А. Касаманян, Э. С. Юзбашян, Уч. зап. ЕГУ, № 3, с. 43, 1977. ² Н. Ф. Немец, Физика элементарных частиц, М., Наука, 1977. ³ З. А. Касаманян, Изв. вузов. Физика, № 11, с. 20, 1979. ⁴ З. А. Касаманян, докт. дис., Ереван, 1982. ⁵ В. М. Гаспарян, ФТТ, т. 31, вып. 2, с. 162-171 (1989). ⁶ V. M. Gasparian, B. L. Atshuler, A. S. Aronov et al., Phys. Lett., v. 132, № 4, p. 201 (1988).