ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Том 97 1997 №1

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

УДК 62-501.12

В. К. Брутян, В. В. Саргсян

Некоторые обобщения теории линейного синтеза управляемых систем

(Представлено академиком НАН Армении Ю. Г. Шукуряном 4/XII 1995)

Пусть управляемые системы являются конечномерными и описываются векторными дифференциальными уравнениями следующего вида:

$$\dot{x} = Ax + Du\ ,\ x(t_0) = x_0\ ,\ t \in [t_0, T] \overset{\Delta}{=} I\ , \tag{1}$$

где $x = x(t)$ n-мерный вектор состояния; $u = u(t)$ r-мерный вектор управления, A и D матрицы соответствующих размеров, причем не обязательно с постоянными во времени элементами.

Функционал качества представляется формулой

$$J(x_0, t_0, u, T) = x_T' \Gamma_T x_T + \int_{t_0}^{T} (x'Bx + u'Eu)dt\ , \tag{2}$$

где x_T — конечное состояние системы.

По предположению все упомянутые матрицы (которые могут быть функциями времени) удовлетворяют следующим условиям:

1) Матрицы A, D, B и E являются ограниченными на интервале I;

2) Без потери общности предполагается, что $A = A'$, $B = B'$, $E = E'$;

3) На интервале I матрица E положительно определенная.

В работах [1-3] показано, что можно составить дифференциальное уравнение Риккати, которое позволяет определить минимум функционала (2). Это возможно, если решение уравнения Риккати существует и является полностью определенным. Достаточным условием для существования полностью определенного решения уравнения Риккати является выполнение условий 1-3 и матричных неравенств: $B \geq 0$ и $\Gamma \geq 0$.

В настоящей работе вышеприведенные достаточные условия формулируются в более общем виде и определяется совокупность необходимых и достаточных условий для существования полностью определенных решений дифференциального уравнения Риккати в задачах линейного синтеза управляемых систем на конечном интервале времени.

При выполнении условий 1-3 ниже введенные дополнительные корреляционные соотношения являются и необходимыми условиями для полностью определенного решения рассматриваемой задачи.

Реакция системы (1) на управление $u(t)$ может быть записана в виде

$$x(t) = \Phi(t,t_0) + \int_{t_0}^{t} \Phi(t,\sigma)D(\sigma)u(\sigma)d\sigma \ ,$$

где $\Phi(t,t_0)$ — передаточная матрица, которая является решением уравнения

$$\frac{d\Phi(t,t_0)}{dt} = A\Phi(t,t_0)\ , \quad \Phi(t_0,t_0) = I_n \ .$$

Если выходом системы считать m-мерный вектор y, определяемый выражением

$$y = Hx \ , \qquad (3)$$

то при нулевых начальных условиях импульсная переходная функция системы по координате y при входном воздействии u имеет вид

$$e(t,\tau) = H(t)\Phi(t,\tau)D(\tau)l(t-\tau)\,,$$

где $l(t)$ функция Хевисайда, которая равна единице при $t > 0$ и нулю при $t \le 0$ [3]. Для дальнейшего интерес представляет следующая матрица:

$$E(t,\tau) = e(t,\tau) + e'(\tau,t)\,. \qquad (4)$$

В частности $E(t,\tau)$ будет корреляционной матрицей, если для всех управлений u и некоторых моментов времени t_1 и t_2 выполняется условие [4,5]:

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_{t_1}^{t_2} u'(t)E(t,\tau)u(\tau)dtd\tau \ge 0\,. \qquad (5)$$

Если соотношение (5) справедливо для моментов времени t_1, t_2 в пределах интервала I, то матрица $E(t,\tau)$ является корреляционной на интервале I, причем граничные значения t_0 и T необязательно конечны.

Теперь задача минимизации функционала качества (2) системы (1) рассматривается на конечном интервале времени.

Преобразуем в функционале качества (2) члены, содержащие выражение $x'Bx$. Для этого используем матрицу Γ, определяемую из дифференциального уравнения [2,6]

$$-\dot{\Gamma} = \Gamma A + AT - \Gamma D E^{-1} D'\Gamma + B , \quad \Gamma(T) = \Gamma_T .$$

С учетом условий 1-3, из которых следует, что $\Gamma = \Gamma'$, получим

$$\int_{t_0}^{T} x'Bxdt = -x'\Gamma x \Big|_{t_0}^{T} + 2\int_{t_0}^{T} (x'\Gamma\dot{x} - x'\Gamma Ax)dt .$$

Далее в соответствии с уравнением (1) имеем

$$x_T'\Gamma_T x_T + \int_{t_0}^{T} x'Bxdt = x_0'\Gamma_0 x_0 + 2\int_{t_0}^{T} x'\Gamma Dudt .$$

Это означает, что если определить матрицу H в виде $H' = \Gamma D$ (2,5), то функционал качества (2) можно представить следующим образом:

$$J(x_0, t_0, u, T) = x_0'\Gamma_0 x_0 + \int_{t_0}^{T} (u'Eu + 2x'\Gamma Du)dt . \qquad (6)$$

Для случая $x_0 = 0$ имеем

$$J(0, t_0, u, T) = \int_{t_0}^{T} (y'u + u'y)dt . \qquad (7)$$

Так как при

$$y(t) = \int_{t_0}^{t} e(t,\tau)u(\tau)d\tau ,$$

и кроме того, $e(t,\tau)$ при $\tau > 1$, то формулу (7) можно представить в виде

$$J(0, u, t_0, T) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} u'(t)\left[e(t,\tau) + e'(\tau,t)\right]u(\tau)dtd\tau , \qquad (8)$$

где $u(t) = 0$ вне интервала I. Используя формулы (4) и (5), можно установить, что если матрица $E(t,\tau)$ является корреляционной на интервале I, где

$$E(t,\tau) = E(t)\delta(t-\tau) + \Gamma D'\Phi(t,\tau)D(\tau)l(t-\tau) + D'(t)\Phi'(\tau,t)D(\tau)\Gamma l(\tau - t) ,$$

$\delta(*)$ — дельта-функция Дирака, то тогда

$$J(0, t_0, u, T) \geq 0 \qquad (9)$$

для любого управления u.

В предположении, что существует управление u^*, минимизирующее (2), можно установить верхнюю границу минимума функционала:

$J^*(x_0, t_0, u^*, T)$. Так как $u \equiv 0$ также представляет собой возможный случай управления, то в соответствии с формулой (6) имеем

$$J(x_0, t_0, 0, T) = x_0' \Gamma_0 x_0 .$$

Отсюда следует, что

$$J^*(x_0, t_0, u^*, T) \le x_0' \Gamma_0 x_0 ,$$

чем и устанавливается верхняя граница.

Для определения нижней границы значения $J^*(x_0, t_0, u^*, T)$ докажем следующую лемму.

Лемма. *Для системы (1) с функционалом качества (2) при выполнении условий 1,2 достаточным для существования нижней границы значения $J^*(x_0, t_0, u^*, T)$ (существование оптимального управления u^* предполагается) является любое из следующих условий.*

4) Выбор матриц A, D, B и E может быть сделан на конечном интервале $[t_0 - t_1, t_0]$ так, что матрица $E(t, \tau)$ является корреляционной на интервале $[t_0 - t_1, T]$.

5) Матрицы A и D являются полностью наблюдаемыми в момент времени t_0 в том смысле, что для любого начального состояния x_0 управление u_1 и время t_1 могут быть найдены путем рассмотрения движения системы от нулевого состояния в момент времени $t_0 - t_1$ к состоянию x_0 в момент времени t_0.

6) Матрица $E(t, \tau) - k\Phi(t_0, t_0)\delta(t - \tau)$ является корреляционной на интервале I для некоторого положительного числа k.

Согласно теории Гамильтона – Якоби – Беллмана можно составить дифференциальное уравнение Риккати, которое позволяет определить минимум функционала (6). Так как член $x_0' \Gamma_0 x_0$ в выражении (6) постоянен при фиксированном значении t, то необходимо минимизировать лишь интеграл в правой части. Обозначив через $\tilde{J}^*$ минимум этого интеграла, запишем соответствующее обобщенное уравнение Гамильтона – Якоби – Беллмана [2,6]

$$\frac{\partial \tilde{J}^*(x,t)}{\partial t} + \tilde{H}^*\left(x, \frac{\partial \tilde{J}^*(x,t)}{\partial x}, \frac{\partial^2 \tilde{J}^*(x,t)}{\partial x^2}, t\right) = 0 , \ \tilde{J}^*(x, T) = 0 \text{ для всех } x, \quad (10)$$

где $\tilde{H}^*$ единственный минимум (по отношению к управлению u) функции

$$\tilde{H}(x, \psi, t, u) = u' E u + 2x' D \Gamma u + \psi' A x + \psi' D u$$

(ψ означает сопряженную переменную). Минимум функции $\tilde{H}$ достигается при некотором управлении $u^*(x, \psi, t)$, которое может быть определено по формуле

$$u^* = -E^{-1}D'\left(\frac{\psi}{2} + \Gamma x\right). \tag{11}$$

Минимизированный гамильтониан при этом принимает следующий вид:

$$\widetilde{H}^*(x,\psi,t) = -\frac{1}{4}\psi' DE^{-1}D'\psi - x'\Gamma D'E^{-1}D'\Gamma x + \psi'(A - DE^{-1}D'\Gamma)x .$$

Можно проверить, что уравнение (10) имеет решение

$$\widetilde{J}^*(x,t) = x'F(t,T)x ,$$

которое дает следующее значение для минимума функционала (2):

$$J^*(x_0,t_0,u^*,T) = x_0'\left[F(t_0,T) + \Gamma(t_0)\right]x_0 .$$

При этом требуется, чтобы функция $F(t,T)$ являлась решением данного уравнения Риккати:

$$-F = F(A - DE^{-1}D'\Gamma) + (A' - \Gamma DE^{-1}D')F - FDE^{-1}D'F - \Gamma DE^{-1}D'\Gamma ,$$

$$F(T,T) = 0 . \tag{12}$$

Из ([2,7]) следует также, что оптимальное управление (11) может быть представлено в другой форме путем замены переменной ψ градиентом функции $\widetilde{J}^*(x,t)$. Таким образом, если функция $F(t,T)$ существует, то

$$u^* = -E^{-1}D'\left[F(t,T) + \Gamma\right]x .$$

Теорема. *Рассмотрим систему (1) и предположим, что условия 1-3 справедливы. Достаточными условиями для существования решения матричного уравнения Риккати (12) на интервале I являются либо выполнение условия 6, либо возможность выбора такого момента времени t_1 и таких матриц A, D, E и B на интервале $[t_0 - t_1, t_0]$, что выполняются условия 4 и 5. Необходимым требованием существования упомянутого решения является выполнение соотношения (9).*

Доказательство леммы. Предположение о том, что матрицы A, D, B и E могут быть выбраны на ограниченном интервале времени $[t_0 - t_1, t_0]$ так, что выполняются условия 4 и 5, приводит к тому, что величина $J(0,u_1,t_0,t_0 - t_1)$ становится ограниченной. В соответствии с соотношением (9) эта величина неотрицательна. Если при этом на интервале I действует оптимальное управление u^* (предполагается, что оно существует), то тогда

$$J(0,u_1,t_0,t_0 - t_1) + J^*(x_0,u^*,T,t_0) \ge 0 .$$

Этот результат устанавливает нижнюю границу для значения $J^*(x_0,u^*,T,t_0)$:

$$-\infty < v(x_0,t_0) \le J^*(x_0,u^*,T,t_0)\,, \qquad (13)$$

где величина v есть $J(0,u_1,t_0,t_0-t_1)$, причем она зависит от x_0 (так как u_1 зависит от x_0).

Чтобы завершить доказательство, покажем, что если выполняется условие 6, то момент времени t_1 и матрицы A, D, B и E на интервале $[t_0-t_1,t_0]$ могут быть выбраны так, что условия 4 и 5 также удовлетворяются. Во-первых, выберем матрицы A и D и момент времени t_1 так, что условие 5 выполняется. При желании можно матрицы A и D выбрать постоянными, а время t_1 произвольно малым. Затем возьмем произвольную матрицу B так, чтобы матрица $\Gamma D'$ была равной нулю. Окончательно выберем матрицу E в виде $E=\lambda I$, где λ — положительная константа, которая будет определена ниже. Тогда для произвольного управления u имеем

$$\int\limits_{t_0-t_1}^{T}\int\limits_{t_0-t_1}^{T} u'(t)E(t,\tau)u(\tau)d\tau dt = \int\limits_{t_0-t_1}^{T} u_2'(t)u_2(t)dt + \int\limits_{t_0}^{T}\int\limits_{t_0}^{T} u_3'(t)E(t,\tau,u_3(\tau)d\tau dt +$$

$$+\int\limits_{t_0}^{T} u_3'(t)\Gamma(t)D'(t)\Phi(t,\tau_0)dt \int\limits_{t_0-t_1}^{t}\Phi(t_0-\tau)D(\tau)u_2(\tau)d\tau\,,$$

где u_2 управление на интервале $[t_0-t_1,t_0]$, а u_3 управление на интервале I. Применяя неравенство Коши—Шварца ([7,8]) и условие 6, получим

$$\int\limits_{t_0-t}^{T}\int\limits_{t_0-t_1}^{T} u'(t)E(t,\tau)u(\tau)dtd\tau \ge \lambda \int\limits_{t_0-t_1}^{t_0} u_2'u_2dt + \lambda\int\limits_{t_0}^{T} u_3'u_3dt - \left\{\left[\int\limits_{t_0}^{T} u_3'u_3dt\right]^{1/2} *\right.$$

$$\left. *\left[\int\limits_{t_0}^{T}\left\|\Gamma D'\Phi(t,t_0)\right\|^2 dt\right]^{1/2}\left[\int\limits_{t_0-t_1}^{T}\left\|\Phi(t_0,\tau)D(\tau)\right\|^2 dt\right]^{1/2}\left[\int\limits_{t_0-t_1}^{t_0} u_2'u_2d\tau\right]^{1/2}\right\}. \qquad (14)$$

Теперь очевидно, что можно подобрать такое число λ, что правая часть неравенства (14) будет неотрицательной независимо от управления $u(t)$. Чтобы убедиться в этом, введем обозначения

$$q_1 \overset{\Delta}{=} \left[\int\limits_{t_0-t_1}^{t_0} u_2'u_2dt\right]^{1/2}, \quad q_2 \overset{\Delta}{=} \left[\int\limits_{t_0}^{T} u_3'u_3dt\right]^{1/2}.$$

Тогда правая часть неравенства (14) может быть записана в виде

$$\lambda q_1^2 + \alpha q_2^2 - \beta q_1 q_2\,, \qquad (15)$$

где α и β фиксированные константы.

Вариации управления $u(t)$ приводят к вариациям значений q_1 и q_2. Следовательно, параметр α нужно выбрать так, чтобы квадратичная форма (15) была неотрицательной для всех значений q_1 и q_2. Заметим, что если $\alpha = 0$, то этого сделать не удается.

В заключение отметим, что корреляционное условие 6 предполагает, что матрицы E на интервале $[t_0 - t_1, t_0]$ могут быть найдены при любых выбранных матрицах B, A и D, и при этом выполняется условие 4. Более того, так как матрицы A и D на интервале $[t_0 - t_1, t_0]$ могут быть выбраны так, что выполняется условие 5, то тогда при выполнении условия 6 применение первой части доказательства леммы дает нижнюю границу для величины $J^*(x_0, u^*, T, t_0)$ (см. неравенство (14)).

Доказательство теоремы. Заметим, что условия достаточности в данном случае совпадают с условиями, при которых справедлива лемма, за исключением того, что теорема требует, чтобы матрица E была положительно определенной на интервале I. Доказательство теоремы ведется от противного. Сначала предполагается, что уравнение (12) не имеет полностью определенного решения. Однако согласно теории данного дифференциального уравнения решение является полностью определенным в окрестности точки T. Но если решение невозможно продолжить на произвольное расстояние слева от точки T, то тогда для некоторой величины $\tau_1 \in I$ (но не в окрестности точки T), а также для некоторого начального значения x_0 и некоторого положительного числа ε при $\varepsilon \to \infty$ имеем $J^*(x_0, u^*, T, \tau_1 + \varepsilon) \to +\infty$ или $-\infty$. Это противоречит либо неравенству (10), либо доказанной лемме.

Таким образом, достаточные условия справедливости леммы совместно с требованием $E > 0$ на интервале I являются достаточными условиями для существования полностью определенного решения уравнения (12) на интервале I.

Соотношение (9) является необходимым условием, так как если оно не удовлетворяется, то в соответствии с формулами (4), (5) и (8) можно показать, что существует некоторое управление $\tilde{u}$, для которого функционал качества $J(0, \tilde{u}, T, t_0)$ отрицателен, а это противоречит тому, что если уравнение (12) имеет полностью определенное решение, то минимум функционала $J^*(0, u^*, T, t_0)$ по формуле

$$J^*(x_0, u^*, T, t_0) = x_0'\left[F(t_0, T) + \Gamma(t_0)\right]x_0$$

равен нулю, что и требовалось доказать.

Высшее военное многопрофильное командное училище МО РА

Վ. Կ. ԲՐՈՒՏՅԱՆ, Վ. Վ. ՍԱՐԳՍՅԱՆ

Կառավարելի համակարգերի գծային սինթեզի տեսության մի քանի ընդհանրացումներ

Դիտարկվում է վերջավոր ժամանակահատվածում կառավարելի համակարգերի գծային սինթեզի խնդիրներում Ռիկկատիի դիֆերենցիալ հավասարումների լրիվ որոշակի լուծումների գոյության համար անհրաժեշտ և բավարար պայմանների համախմբությունը: Հայտնի բավարար պայմանները ձևակերպվում են ավելի ընդհանուր տեսքով: Նկարագրված լրացուցիչ կոռելյացիոն առնչությունները հանդիսանում են դիտարկվող խնդրի լրիվ որոշակի լուծման համար նաև անհրաժեշտ պայմաններ:

ЛИТЕРАТУРА–ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *В. И. Зубов*, Лекции по теории управления, Наука, М., 1970. [2] *В. К. Брутян*, Основные аспекты теории непрерывных марковских систем и ее приложение, Айастан, Ереван, 1984. [3] *В. Г. Флеминг, Р. В. Ришел*, Детерминистическое и оптимальное управление, Наука, М., 1980. [4] *В. К. Брутян*, Автоматика и телемеханика, № 7, с. 51-61, 1980. [5] *В. К. Брутян*, ДАН АрмССР, т. 89, № 3, с. 120-126 (1989). [6] *Р. Е. Калман, М. Арбиб, П. Фалб*, Очерки по математической теории систем, Мир, М., 1974. [7] *А. Балакришнан*, Введение в теорию оптимизации в гильбертовом пространстве, Мир, М., 1974. [8] *Р. Курант*, Дифференциальные уравнения с частными производными, Наука, М., 1965.