ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Том 96 1996 № 1

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

УДК 519.682.1

О. А. Амбарцумян

Об алгоритмической сложности двух задач, связанных с размещением интервалов

(Представлено академиком НАН Армении Ю. Г. Шукуряном 25/VIII 1994)

В этой статье продолжим начатое в [1] исследование некоторых задач, связанных с канальной трассировкой. Напомним несколько определений.

Пусть дана прямоугольная сеть. Горизонтальные линии сети назовем магистралями. Интервалом назовем пару неотрицательных целых $[a, b]$, $a \leqslant b$, и b не превосходит длину канала. Размещением интервалов назовем присвоение интервалам номера магистрали, причем пересекающиеся интервалы должны попасть на различные магистрали. Интервалы $[a, b]$ и $[c, d]$ назовем пересекающимися, если $a \leqslant c \leqslant b$ или $c \leqslant a \leqslant d$. В статье [1] доказана NP полнота задачи размещения интервалов, где каждому интервалу соответствует числовой отрезок допустимых номеров магистралей. Очевидно, что если вместо отрезков интервалам соответствует произвольное конечное множество номеров допустимых магистралей, то задача останется NP полной. В этой работе на эти множества поставлены дополнительные ограничения—мощность этих множеств не должна превышать заданное число K.

Определение. *K-размещением интервалов назовем следующую задачу. Пусть даны интервалы $I_1 \ldots I_n$, каждому из них поставлено в соответствие K-элементное множество допустимых для размещения магистралей. Необходимо разместить интервалы на магистралях так, чтобы пересекающиеся интервалы оказались на различных магистралях.*

В статье представлены два полиномиальных алгоритма для этой задачи—при $K=2$ и доказана NP полнота при $K=3$.

Представим полиномиальные алгоритмы для задачи при $K=2$.

Алгоритм а). Обозначим соответствующее i-му интервалу множество через $\{\alpha_i, \beta_i\}$.

Шаг 1. $j := 1$.

Шаг 2. Попробуем разместить интервал I_j на магистрали α_j или β_j. Если это возможно, перейти к шагу 8.

Шаг 3. Разместим интервал I_j на магистрали α_j. При этом он пересечется с множеством интервалов $C_1=\{I_1^1,\dots,I_{s_1}^1\}$.

Шаг 4. $m:=1$, $R:=\varnothing$.

Шаг 5. Если $R\cap C_m=\varnothing$, перейти к шагу 7

Шаг 6. Если I_j на магистрали β_j, то работа алгоритма завершается (размещение невозможно), иначе аннулируем все перемещения интервалов и разместим интервал I_j на магистрали β_j. Получим множество C_m пересекающихся с I_j интервалов и перейдем к шагу 4.

Шаг 7. $R:=R\cup C_m$, $m:=m+1$, переместим интервалы из C_{m-1} на следующие для них допустимые магистрали. При этом они пересекутся с интервалами $C_m=\{I_1^m\dots I_s^m\}$. Если $C_m\neq\varnothing$, переходим к шагу 5.

Шаг 8. $j:=j+1$. Если $j\leqslant n$, переходим к шагу 2.

Шаг 9. Завершение работы алгоритма

Сложность алгоритма а)

$$C(A)\leqslant 2+3\times 2+\dots+2(n-1)\leqslant n(n+1)$$

Алгоритм б)

Шаг 1. Если нет неразмещенных интервалов, завершаем работу алгоритма.

Шаг 2. Выберем произвольный, еще не размещенный интервал, и разместим его на магистрали α. При этом для некоторого класса интервалов однозначно определяется номер магистрали или возникает противоречие. Если имеет место противоречие, то переместим выбранный интервал на β. Опять же для некоторого класса интервалов однозначно определится номер магистрали. Если снова имеет место противоречие, то размещение невозможно.

Шаг 3. Разместим класс интервалов, исключим их из рассмотрения и перейдем к шагу 1.

Легко убедиться, что сложности алгоритмов а) и б) почти одинаковы.

Очевидно, что если алгоритм б) находит размещение, то оно удовлетворяет условию задачи, так как в ходе алгоритма не делается ни одного недопустимого шага. Наоборот, если задача имеет решение, то алгоритм найдет ее, так как иначе мы будем иметь некоторый интервал I^*, который нельзя разместить ни на магистрали α^*, ни β^*.

Теорема. *Задача 3-размещение интервалов NP полна.*

Доказательство. Как уже отмечалось выше, в статье [1] доказана NP полнота задачи размещения интервалов при заданном для каждого интервала произвольном конечном множестве допустимых магистралей. Докажем теорему полиномиальным сведением этой задачи к задаче 3-размещение.

Пусть даны интервалы $I_1\dots I_n$. Каждому интервалу I_j поставлено в соответствие некоторое конечное множество $S_j=\{l_1, l_2,\dots, l_{s_j}\}$ натуральных чисел.

Добавим для каждого интервала I_j s_j-2 магистралей. Обозначим эти магистрали через $M_1^j, M_2^j, \dots, M_{s_j-2}^j$. Вместо каждого из интервалов I_j рассмотрим интервалы $I_{j,1}=I_{j,2}=\dots=I_{j,s_j-1}=I_j$ и поставим им в соответствие следующие числовые множества: $\{l_1, l_2, M_1^j\}, (M_1^j, M_2^j, l_3) \dots, \{M_{s_j-2}^j, l_{s_j-1}, l_{s_j}\}$ соответственно. Рассмотрим задачу для полученных множеств. Если полученная задача имеет решение, то легко получить решение для общей задачи, так как для любого j какой-нибудь из интервалов $I_{j,\cdot}$ попадет на магистраль l_i. Если таких интервалов окажется несколько, то оставим из них только один. Выкинем также все добавленные магистрали.

Легко убедиться, что истинно также обратное утверждение—если общая задача имеет решение, то имеет решение также полученная задача.

Как и в случае задачи K-выполнимость [2], в исследуемой нами задаче граница между полиномиальностью и NP полнотой проходит между значениями параметра K 2 и 3. Представленные в статье алгоритмы, вероятно, могут быть использованы при построении эвристических алгоритмов для решения общей задачи (для произвольного K). Эти задачи возникают при построении алгоритмов для автоматического проектирования печатных плат и микросхем [3].

Выражаю благодарность моему руководителю С. Е. Маркосяну за поддержку в ходе работы.

Ереванский государственный университет

Հ. Հ. ՀԱՄԲԱՐՁՈՒՄՅԱՆ

Ինտերվալների տեղադրության վերաբերող երկու խնդիրների ալգորիթմական բարդության վերաբերյալ

Ինտերվալ կանվանենք ոչբացասական թվերի $[a, b]$ զույգը ($a \leqslant b$)։

Դիցուք տրված է ուղղանկյուն ցանց։ Ցանցի հորիզոնական գծերը կանվանենք մագիստրալներ։ Ինտերվալների K-տեղադրություն անվանենք հետևյալ խնդիրը։

Դիցուք տրված $I_1 \dots I_n$ ինտերվալներից յուրաքանչյուրին համապատասխանեցված է թույլատրելի մագիստրալների K էլեմենտանոց բազմություն։ Ինտերվալները տեղադրել թույլատրելի մագիստրալների վրա այնպես, որպեսզի հատվող ինտերվալներին համապատասխանեն տարբեր մագիստրալներ։

Հոդվածում ներկայացված են այդ խնդրի լուծման համար երկու պոլինոմիալ ալգորիթմներ $K=2$ դեպքում և ապացուցված է NP լրիվությունը $K=3$ դեպքում։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1. **С. Е. Маркосян, О. А. Амбарцумян.** ДНАН Армении, т. 94, № 4, с. 231—236 (1993).
2. **М. Гэри, Д. Джонсон.** Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М., Мир, 1982.
3. **A. S. LaPough.** Algorithms for Integrated Circuit Layout. An Analytic Approach. Ph. D. Thesis, Laboratory for Computer Science. MIT (november, 1980).