ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Том 95 | 1995 | № 3

МАТЕМАТИКА

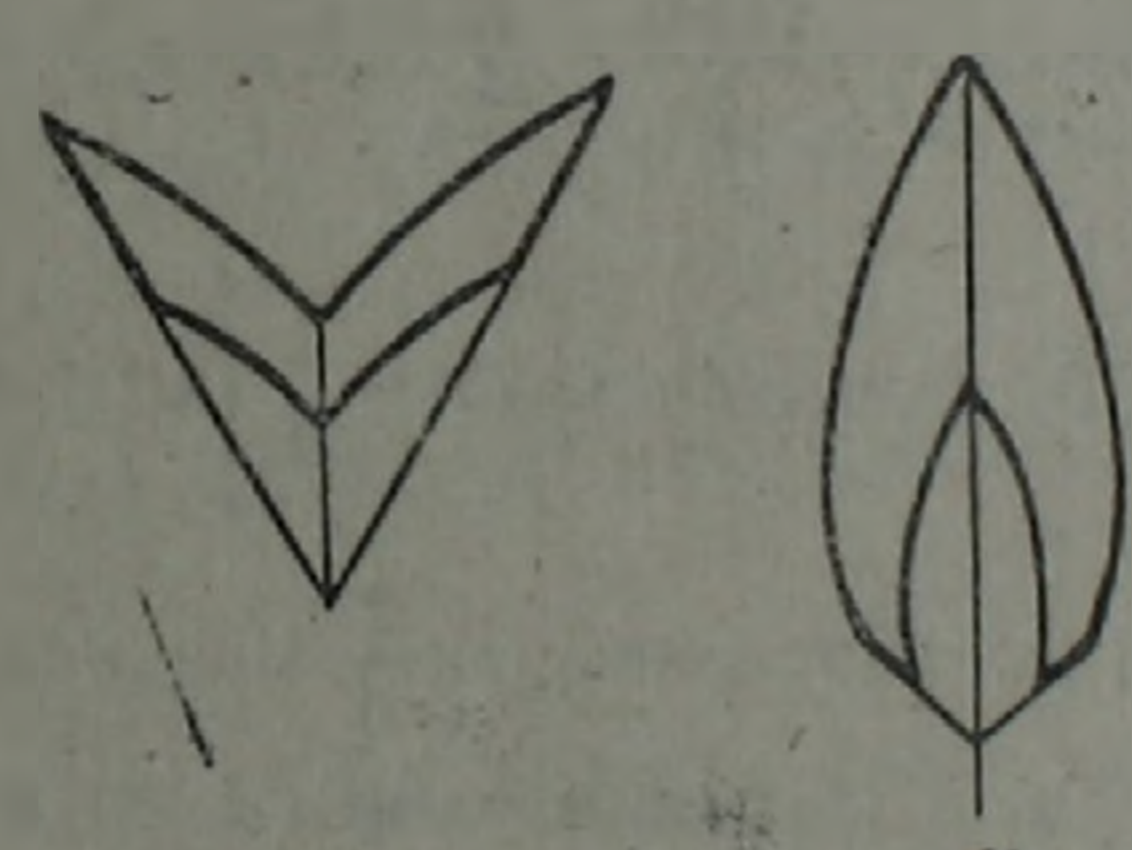
УДК 517. 958

Р. С. Минасян

Тепловое поле в криволинейном стреловидном теле

(Представлено чл.-корр. НАН Армении А. Б. Нерсесяном 8/IV 1994)

Рассмотрим плоское стационарное тепловое поле в цилиндрическом теле, ограниченном поверхностями $r=R_1e^{\omega\varphi}$, $r=R_2e^{\omega\varphi}$ при $0\leqslant\varphi\leqslant\varphi_1$ и $r=R_1e^{\omega(2\pi-\varphi)}$; $r=R_2e^{\omega(2\pi-\varphi)}$ при $2\pi-\varphi_1<\varphi<\varphi_1$, а также плоскостями $\varphi=\varphi_1$; $\varphi=2\pi-\varphi_1$ (рис., а при $\omega>0$ и рис., б при $\omega<0$). Предполагаем тепловое поле симметричным относительно оси $\varphi=0$. Функция $U(r, \varphi)$ распределения температуры удовлетворяет уравнению (([1]), с. 187)



а) б)

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}+\frac{1}{2}\frac{\partial U}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial\varphi^2}=-\frac{1}{\lambda}W(r, \varphi) \tag{1}$$

и граничным условиям

$$U(R_1e^{\omega\varphi},\varphi)=S_0(\varphi),\ U(R_2e^{\omega\varphi}, \varphi)=S_1(\varphi);\ (0\leqslant\varphi\leqslant\Phi);$$

$$U(r, \Phi)=T(r);\ \frac{\partial U}{\partial\varphi}\Big/_{\varphi=0}=0. \tag{2}$$

Здесь λ—коэффициент теплопроводности; $W(r, \varphi)$—интенсивность внутренних источников тепла. Предполагаем, что $S_0(\varphi)$, $S_1(\varphi)$, $T(r)$ непрерывны в соответствующих областях и обладают почти повсюду производной с ограниченной вариацией, причем $S_0(\Phi)=(R_1)$; $S_1(\Phi)=T(R_2)$.

Прежде чем перейти к решению задачи, преобразуем систему координат, обозначив $re^{-\omega\varphi}=R_1e^{\sqrt{1+\omega^2}\xi}$; $\varphi=\eta$. Тогда функция $U^*(\xi,\ \eta)=U(R_1\exp(\sqrt{1+\omega^2}\xi+\omega\eta),\ \eta)$, определенная в области

$$\left(0\leqslant\xi\leqslant\frac{1}{\sqrt{1+\omega^2}}\ln\frac{R_2}{R_1};\quad 0\leqslant\eta\leqslant\Phi\right),$$

будет удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial^2U^*}{\partial\xi^2}-2\alpha\frac{\partial^2U^*}{\partial\xi\partial\eta}+\frac{\partial^2U^*}{\partial\eta^2}=-\frac{1}{\lambda}W^*(\xi,\ \eta) \tag{3}$$

и граничным условиям

$$U^*(0,\ \eta)=S_0(\eta);\ U^*(d,\ \eta)=S_1(\eta);\ U^*(\xi,\ \Phi)=T^*(\xi);\left(\frac{\partial U^*}{\partial\eta}-\alpha\frac{\partial U^*}{\partial\xi}\right)\Big/_{\eta=0}=0. \tag{4}$$

Здесь

$$\alpha=\frac{\omega}{\sqrt{1+\omega^2}};\ d=\frac{1}{\sqrt{1+\omega^2}}\ln\frac{R_2}{R_1};\ T^*(\xi)=T(R_1\exp(\sqrt{1+\omega^2}\xi+\omega\Phi));$$

$$W^*(\xi,\ \eta)=R_1^2\exp(2\sqrt{1+\omega^2}\xi+2\omega\eta)\ W(R_1\exp(\sqrt{1+\omega^2}\xi+\omega\eta),\ \eta). \tag{5}$$

Аналогично ([2], с. 145), решение задачи представим одновременно в виде двух разложений в ряд:

$$U^*(\xi,\ \eta)=\sum_{k=1}^{\infty}f_k(\xi)\sin\gamma_k\eta=\frac{G_0(\xi)}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}G_k(\xi)\cos\gamma_k\eta, \tag{6}$$

где

$$\gamma_k=\frac{K\pi}{d};\ f_k(\xi)=\frac{2}{d}\int_0^d U^*(\xi,\ \eta)\sin\gamma_k\eta d\eta;\ G_k(\xi)=\frac{2}{d}\int_0^d U^*(\xi,\ \eta)\cos\gamma_k\eta d\eta.$$

Умножая уравнение (3) соответственно на $\frac{2}{d}\sin\gamma_k\eta d\eta$ и $\frac{2}{d}\cos\gamma_k\eta d\eta$ и интегрируя по η от 0 до d, для определения $f_k(\xi)$ и $G_k(\xi)$ получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$f''_k(\xi)+2\alpha\gamma_kG'_k(\xi)-\gamma_k^2f_k(\xi)=-\frac{2}{d}p_k(\xi), \tag{7}$$

$$G''_k(\xi)-2\alpha\gamma_kf'_k(\xi)-\gamma_k^2G_k(\xi)=-\frac{2}{d}q_k(\xi),$$

Здесь обозначено

$$p_k(\xi)=\frac{1}{\lambda}\int_0^d W^*(\xi,\ \eta)\sin\gamma_k\eta d\eta+\gamma_k[S_0(\xi)-(-1)^kS_1(\xi)];$$

$$q_k(\xi)=\frac{1}{\lambda}\int_0^d W^*(\xi,\ \eta)\cos\gamma_k\eta d\eta+2\alpha[S'_0(\xi)-(-1)^kS'_1(\xi)]-S_0(\xi)+(-1)^kS_1(\xi); \tag{8}$$

$$S_2(\xi)=\frac{\partial U^*}{\partial\eta}\Big|_{\eta=0};\qquad S_3(\xi)=\frac{\partial U^*}{\partial\eta}\Big|_{\eta=d}$$

Решая уравнения (7) и удовлетворяя соответствующим граничным условиям (4), для $f_k(\xi)$ и $G_k(\xi)$ получим соответствующие выражения:

$$f_k(\xi)=\frac{2}{\nu\gamma_k d\,\mathrm{ch}\,\nu\gamma_k b}\Big\{\mathrm{sh}\,\nu\gamma_k(b-\xi)\Big[\int_0^{\xi}(p_k(t)\cos\alpha\gamma_k(\xi-t)-q_k(t)\sin\alpha\gamma_k(\xi-t))\,\mathrm{ch}\,\nu\gamma_k t\,dt-$$

$$-\alpha(S_0(0)-(-1)^kS_1(0))\sin\alpha\gamma_k\xi\Big]+\mathrm{ch}\,\nu\gamma_k\xi\Big[\int_{\xi}^{b}(p_k(t)\cos\alpha\gamma_k(t-\xi)+$$

$$+q_k(t)\sin\alpha\gamma_k(t-\xi))\,\mathrm{sh}\,\nu\gamma_k(b-t)\,dt+\nu\gamma_k\int_0^d T^*(\eta)\sin\gamma_k(\eta+\alpha b-\alpha\xi)\,d\eta\Big]\Big\};\qquad (9)$$

$$G_k(\xi)=\frac{2}{\nu\gamma_k d\,\mathrm{ch}\,\nu\gamma_k b}\Big\{\mathrm{sh}\,\nu\gamma_k(b-\xi)\Big[\int_0^{\xi}(p_k(t)\sin\alpha\gamma_k(\xi-t)+$$

$$+q_k(t)\cos\alpha\gamma_k(\xi-t))\,\mathrm{ch}\,\nu\gamma_k t\,dt+\alpha(S_0(0)-(-1)^kS_1(0))\cos\alpha\gamma_k\xi\Big]-$$

$$-\mathrm{ch}\,\nu\gamma_k\xi\Big[\int_{\xi}^{b}(p_k(t)\sin\alpha\gamma_k(t-\xi)-q_k(t)\cos\alpha\gamma_k(t-\xi))\,\mathrm{sh}\,\nu\gamma_k(b-t)\,dt-$$

$$-\nu\gamma_k\int_0^d T^*(\eta)\cos\gamma_k(\eta+\alpha b-\alpha\xi)\,d\eta\Big]\Big\};$$

$$G_0(\xi)=\frac{2}{d}\Big\{(b-\xi)\Big[\int_0^{\xi}q_0(t)\,dt+\alpha(S_0(0)-S_1(0))\Big]+\int_{\xi}^{b}q_0(t)(b-t)\,dt-$$

$$-\int_0^{d_1}T^*(\eta)\,d\eta\Big\},$$

где $\nu=\sqrt{1-\alpha^2}$. В выражения (9) для $f_k(\xi)$ и $G_k(\xi)$ входят неизвестные функции $S_2(\xi)$ и $S_3(\xi)$. Для их определения потребуем чтобы вторым представлением (6) функции $U^*(\xi,\eta)$ также выполнялись условия на $\eta=0$ и $\eta=d$:

$$\frac{G_0(\xi)}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}G_k(\xi)=S_0(\xi);\qquad \frac{G_0(\xi)}{2}\sum_{k}^{\infty}+(-1)^kG_k(\xi)=S_1(\xi).\qquad (10)$$

Умножим оба уравнения (10) на $\frac{2}{b}\cos\delta_j\xi d\xi$, где $\delta_j=\left(j-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{b}$, и проинтегрируем от 0 до b. При этом, вследствие равномерной сходимости рядов, входящих в левые части (10), возможна перестановка знаков суммы и интеграла. Учитывая (7) и (4), после некоторых преобразований для коэффициентов Фурье функций $S_2(\xi)$ и $S_3(\xi)$ получим следующие выражения:

$$a_j^{(l)}=\alpha\delta_j\frac{\operatorname{ch}\nu\delta_j d-(-1)^l\cos\alpha\delta_j d}{d\operatorname{sh}\nu\delta_j d}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1+(-1)^{k+l}}{(\gamma_k^2+\delta_j^2)^2-4\alpha^2\gamma_k^2\delta_j^2}[(\gamma_k^2-\delta_j^2-$$

$$-2(-1)^j\nu\gamma_k\delta_j)m_k^{(0)}+(\gamma_k^2-\delta_j^2+2(-1)^j\nu\gamma_k\delta_j)m_k^{(1)}]+\zeta_{kj}^{(l)},\qquad (l=0,1).\qquad (11)$$

Здесь

$$a_j^{(l)}=2\int_0^b[S_2(\xi)-(-1)^lS_3(\xi)]\cos\delta_j\xi d\xi$$

$$m_k^{(l)}=d[\nu\gamma_k f_k(0)-(-1)^l f_k'(b)]+2\nu[S_0(0)-(-1)^kS_1(0)];$$

$$\zeta_j^{(l)}=\frac{2}{\operatorname{sh}\nu\delta_j d}\Big\{[\alpha\operatorname{sh}\nu\delta_j d+(-1)^l\nu\sin\alpha\delta_j d]\int_0^b[S'_0(\xi)-(-1)^kS'_1(\xi)]\cos\delta_j\xi d\xi+$$

$$+\nu[\operatorname{ch}\nu\delta_j d-(-)^l\cos\alpha\delta_j d][\int_0^b(S'_0(\xi)+(-1)^lS'_1(\xi))\sin\delta_j\xi d\xi+\frac{\alpha}{\delta_j d}(1+$$

$$+(-1)^l)(S_0(0)-S_1(0))]-(-1)^j\int_0^d T^{*\prime}(\eta)[\alpha(\sin\alpha\delta_j\eta\operatorname{sh}\nu\delta_j(d-\eta)-$$

$$-(-1)^l\sin\alpha\delta_j(d-\eta)\operatorname{sh}\nu\delta_j\eta)+\nu(\cos\alpha\delta_j\eta\operatorname{ch}\nu\delta_j(d-\eta)-(-1)^l\cos\alpha\delta_j(d-$$

$$-\eta)\operatorname{ch}\nu\delta_j\eta)]d\eta+\frac{1}{\lambda}\int_0^b\int_0^d W^*(\xi,\eta)[\cos\delta_j(\xi+\alpha\eta)\operatorname{sh}\nu\delta_j(d-\eta)+$$

$$+(-1)^l\cos\delta_j(\xi-\alpha d+\alpha\eta)\operatorname{sh}\nu\delta_j\eta]d\eta d\xi\Big\}.\qquad (12)$$

В свою очередь $m^0{}_k$ и $m^1{}_k$, входящие в уравнения (11), определяются, согласно (9) и (12), из следующих выражений:

$$m_k^{(l)}=\frac{2\alpha\gamma_k}{b\operatorname{ch}\nu\gamma_k b}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{a_j^{(k)}}{(\delta_j^2+\gamma_k^2)^2-4\alpha^2\gamma_k^2\delta_j^2}\Big[(\delta_j^2-\gamma_k^2-2(-1)^{j+1}\nu\gamma_k\delta_j)\operatorname{sh}\nu\gamma_k b+$$

$$+(-1)^l(\delta_j^2-\gamma_k^2+2(-1)^{j+1}\nu\gamma_k\delta_j)\cos\alpha\gamma_k b\Big]+r_k^{(l)},\qquad (l=0;1)\qquad (13)$$

где обозначено

$$r_k^{(l)}=\frac{2}{\operatorname{ch}\nu\gamma_k b}\Big\{\int_0^b\Big[S'_0(\xi)-(-1)^kS'_1(\xi)\Big]\Big[\alpha\sin\alpha\gamma_k\xi\operatorname{sh}\nu\gamma_k(b-\xi)+$$

$$
+\nu\cos\alpha\gamma_k\xi \operatorname{ch}\nu\gamma_k(b-\xi)-(-1)^l(\alpha\sin\alpha\gamma_k(b-\xi)\operatorname{ch}\nu\gamma_k\xi+\nu\cos\alpha\gamma_k(b-\xi)\operatorname{sh}\nu\gamma_k\xi)]d\xi-
$$

$$
-(-1)^l\int_0^d T^{*}(\eta)[\alpha\operatorname{ch}\nu\gamma_k b\sin\gamma_k\eta+\nu\operatorname{sh}\nu\gamma_k b\cos\gamma_k\eta-(-1)^l\cos\gamma_k(\eta+\alpha b)]d\eta+
$$

$$
+\frac{1}{\lambda}\int_0^b\int_0^d W^{*}(\xi,\eta)\Big[\sin\gamma_k(\eta+\alpha\xi)\operatorname{sh}\nu\gamma_k(b-\xi)+(-1)^l\sin\gamma_k(\eta-\alpha b+
$$

$$
+\alpha\xi)\operatorname{ch}\nu\gamma_k\xi\Big]d\eta d\xi\Big\}. \tag{14}
$$

Таким образом, для определения $a^{(b)}_j$ и $m^{(l)}_k$ получили совокупность двух бесконечных систем линейных алгебраических уравнений (11) и (13). Исследование этих систем показывает, что при $|\alpha|<0{,}82$ суммы модулей коэффициентов при неизвестных в каждом из уравнений для $k\geqslant 3$, $j\geqslant 3$ строго меньше единицы. Свободные члены $\zeta^{(l)}_j$ и $r^{(l)}_k$, как легко видеть из (12) и (14), оставаясь строго ограниченными, с возрастанием j и k стремятся к нулю соответственно с быстротой $0\left(\frac{1}{j}\right)$ и $0\left(\frac{1}{k}\right)$. Согласно теории бесконечных систем ([3] с. 33) имеют место единственность решения систем (11) и (13) и сходимость метода последовательных приближений.

Подставляя значения $f_k(\xi)$ и $G_k(\xi)$ из (9) и (6) и переходя к цилиндрическим координатам, получим два выражения для $U(r,\varphi)$, любым из которых можем воспользоваться, предпочитая одно другому в зависимости от быстроты сходимости рядов в исследуемой точке. Задаваясь значениями функций $S_0(\varphi)$, $S_1(\varphi)$, $T(r)$, интенсивности тепловыделения $W(r,\varphi)$, решением усеченных систем (11) и (13) найдем оценки для $m^{(l)}_k$ и $a^{(l)}_j$ сверху и снизу, после чего способом, описанным в ([4], с. 41), получим значения $U(r,\varphi)$ с избытком и недостатком.

Институт математики НАН Армении

Ռ. Ս. ՄԻՆԱՍՅԱՆ

Ջերմային դաշտը կորագիծ նետաձև մարմնում

Դիտարկվում է հարթ կայունացած ջերմային դաշտը գլանաձև մարմնում, սահմանափակված $r=R_1 l^{\omega\varphi}$; $r=R_2 l^{\omega\varphi}$ *(երբ* $0\leqslant\varphi\leqslant\psi_1$*) և* $r=R_1 l^{\omega(2\pi-\varphi)}$ $r=R_1 l^{\omega(2\pi-\varphi)}$ *(երբ* $2\pi-\varphi_1\leqslant\varphi\leqslant\varphi_1$*) մակերևույթներով, ինչպես նաև* $\psi=\psi_1$, $\psi=2\pi-\psi_1$ *հարթություններով։*

Լուծումը տրվում է միաժամանակ երկու տեսակ շարքերով ներկայացմամբ։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] Г. Карслоу, Д. Егер. Теплопроводность твердых тел. М., 1964. [2] Р. С. Минасян, ДАН АрмССР, т. 23, № 4, с. 145—152 (1956). [3] Л. В. Канторович, В. И. Крылов, Приближенные методы высшего анализа, М., 1962. [4] Р. С. Минасян, Изв. АН АрмССР, Сер. физ.-мат. наук, т. 11, № 3, с. 51—62 (1958).