ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Том 93 | 1992 | № 1

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

УДК 539.3

В. С. Тоноян, Н. С. Мелкумян

Антиплоская контактная задача для упругой полуплоскости с вертикальной трещиной, идущей от границы полуплоскости

(Представлено чл.-корр. АН Армении Б. Л. Абрамяном 27/VII 1991)

Рассматривается антиплоская контактная задача для упругой изотропной полуплоскости ($x \geq 0$) с вертикальной конечной трещиной ($0 < x < a$), выходящей на границу. К границе полупоскости по обе стороны от начала трещины приклеплены два симметричных штампа конечных размеров ($0 \leq |y| \leq b$).

Принимается, что на штампы действуют силы, приводящие к состоянию антиплоской деформации.

Задача решена методом Фурье в перемещениях.

В силу кососимметрии граничных условий достаточно рассматривать только квадрант ($0 < x < \infty$, $0 < y < \infty$) со смешанными граничными условиями

Решение задачи ищется в виде сумм интегралов Фурье. Для определения неизвестных плотностей интегралов Фурье получена система парных интегральных уравнений. Парные интегральные уравнения решаются в замкнутом виде методом ортогонализации, и полученная система сводится к интегральному уравнению типа Фредгольма второго рода. Доказана разрешимость этого уравнения, в частности, решение может быть найдено методом последовательных приближений.

Выведены формулы для определения напряжений и перемещений в любой точке полуплоскости. Получены формулы для контактных напряжений. Выделена особенность и вычислены коэффициенты интенсивности напряжений как на конце трещины, так и на конце жесткосцепленного штампа.

При приравнивании значения коэффициента интенсивности напряжений к критической величине по теории хрупкого разрушения материала получается выражение, которое определяет распространение трещины и ее устойчивость.

В частном случае, когда длина трещины стремится к нулю, получается антиплоская задача теории упругости для полуплоскости без трещины. В этом случае решение задачи получается в замкнутом виде.

В силу кососимметрии достаточно рассматривать только область квадранта при следующих граничных условиях:

$$
\begin{aligned}
&U_z(0, y) = f_1(y), && 0 \leqslant y < b;\\
&\tau_{zx}(0, y) = f_2(y), && b < y < \infty;\\
&\tau_{zy}(x, 0) = f_3(x), && 0 < x < a;\\
&U_z(x, 0) = 0 && a \leqslant x < \infty.
\end{aligned} \tag{1}
$$

Решение задачи ищется в виде сумм интегралов Фурье [1]:

$$
U_z(x, y) = \int\limits_0^\infty A(\alpha) e^{-\alpha x} \sin \alpha y d\alpha + \int\limits_0^\infty C(\beta) e^{-\beta y} \cos \beta x d\beta, \tag{2}
$$

тогда для касательных напряжений имеется:

$$
\begin{aligned}
\tau_{zx} &= -G\int\limits_0^\infty \alpha A(\alpha) e^{-\alpha x} \sin \alpha y d\alpha - G\int\limits_0^\infty \beta C(\beta) e^{-\beta y} \sin \beta x d\beta;\\
\tau_{zy} &= G\int\limits_0^\infty \alpha A(\alpha) e^{-\alpha x} \cos \alpha y d\alpha - G\int\limits_0^\infty \beta C(\beta) e^{-\beta y} \cos \beta x d\beta.
\end{aligned} \tag{3}
$$

Здесь $A(\alpha)$ и $C(\beta)$ неизвестные функции, подлежащие определению из граничных условий (1). После удовлетворения граничным условиям (1) получается следующая система «парных» интегральных уравнений:

$$
\begin{cases}
\int\limits_0^\infty A(\alpha) \sin \alpha y d\alpha = f_1(y) - \int\limits_0^\infty C(\beta) e^{-\beta y} d\beta; & 0 \leqslant y \leqslant b;\\
\int\limits_0^\infty \alpha A(\alpha) \sin \alpha y d\alpha = -\dfrac{1}{G} f_2(y); & b < y < \infty,
\end{cases} \tag{4}
$$

$$
\begin{cases}
\int\limits_0^\infty \beta C(\beta) \cos \beta x d\beta = -\dfrac{1}{G} f_3(x) + \int\limits_0^\infty \alpha A(\alpha) e^{-\alpha x} d\alpha; & 0 < x < a\\
\int\limits_0^\infty C(\beta) \cos \beta x d\beta = 0, & a \leqslant x \leqslant \infty.
\end{cases} \tag{5}
$$

Подобные «парные» интегральные уравнения рассматривались в работах [2-4] и др).

Используя результаты работ [3, 4] для функций $A(\alpha)$ и $C(\beta)$, получим следующие выражения из (4) и (5):

$$A(\alpha)=\frac{2}{\pi}\int_0^b \varphi_1(r)J_0(\alpha r)\,dr+\frac{2}{\pi}\int_b^\infty \varphi_2(r)J_0(\alpha r)\,dr-$$

$$-\int_0^\infty C(\beta)\,d\beta\int_0^b\left[\beta r L_0(\beta r)+\frac{2}{\pi}-\beta r I_0(\beta r)\right]J_0(\alpha r)\,dr; \tag{6}$$

$$C(\beta)=\frac{2}{\pi}\int_0^a \varphi_3(t)J_0(\beta t)\,dt+$$

$$+\int_0^\infty \alpha A(\alpha)\,d\alpha\int_0^a t\left[I_0(\alpha t)-L_0(\alpha t)\right]J_0(\beta t)\,dt, \tag{7}$$

где $J_\nu(z)$ — функция Бесселя первого рода с действительным аргументом; $I_\nu(z)$ — функция Бесселя первого рода от мнимого аргумента; $L_\nu(z)$ — функция Струве от мнимого аргумента.

Исключая функцию $C(\beta)$ из (7) и (6), для функции $A(\alpha)$ получается следующее интегральное уравнение типа Фредгольма второго рода:

$$A(\alpha)=\Omega(\alpha)+\int_0^\infty A(\alpha)K(\gamma,\alpha)\,d\gamma, \tag{8}$$

где

$$\Omega(\alpha)=\frac{2}{\pi}\int_0^b \varphi_1(r)J_0(\alpha r)\,dr+\frac{2}{\pi}\int_b^\infty \varphi_2(r)J_0(\alpha r)\,dr-$$

$$-\frac{4}{\pi^2}\int_0^a t\varphi_3(t)\,dt\int_0^b \frac{J_0(\alpha r)}{t^2+r^2}\,dr; \tag{9}$$

$$K(\gamma,\alpha)=\frac{2}{\pi}\gamma\int_0^\infty t^2\left[L_0(\gamma t)-I_0(\gamma t)\right]dt\int_0^b \frac{J_0(\alpha r)}{t^2+r^2}\,dr. \tag{10}$$

Очевидно, что функция $\Omega(\alpha)$ ограничена сверху и стремится к нулю, когда $\alpha\to\infty$.

С использованием результатов работы ([5]) доказывается, что (8) можно решить методом последовательных приближений.

Решая интегральное уравнение (8) методом последовательных приближений, получим выражение функции $A(\alpha)$. Далее, по формуле (7), можно определить искомую функцию $C(\beta)$.

Напряжения и перемещения по известным формулам (2) и (3) будут определены в любой точке полуплоскости. В частности, напряжения вне разреза и перемещения берегов разреза $(y=0)$ определяются формулами:

$$\tau_{xy}(x, 0) = \frac{2}{\pi}\frac{Gx}{a}\frac{\varphi_3(a)}{\sqrt{x^2-b^2}} + \frac{Gx}{\sqrt{x^2-a^2}} \times$$

$$\times \int_0^\infty \alpha\left[I_0(\alpha a) - L_0(\alpha a)\right] A(\alpha)\, d\alpha + \frac{2}{\pi} Gx \int_0^a \frac{\varphi_3(t) - t\varphi_3'(t)}{t^2\sqrt{x^2-t^2}}\, dt +$$

$$+ Gx \int_0^a \frac{dt}{\sqrt{x^2-t^2}} \int_0^\infty \alpha^2 \left| L_1(\alpha t) + \frac{2}{\pi} - I_1(\alpha t)\right| A(\alpha)\, d\alpha +$$

$$+ G\int_0^\infty \alpha A(\alpha) e^{-\alpha x}\, d\alpha, \quad a < x < \infty;$$

$$U_z(x, 0) = \frac{2}{\pi}\int_x^a \frac{\varphi_3(t)}{\sqrt{t^2-x^2}}\, dt +$$

$$+ \int_x^a \frac{t\,dt}{\sqrt{t^2-x^2}} \int_0^\infty \alpha\left[I_0(\alpha t) - L_0(\alpha t)\right] A(\alpha)\, d\alpha, \quad 0 < x < a. \qquad (12)$$

Коэффициент особенности K_{III} имеет вид

$$K_{III} = Gx\left\{\frac{2\varphi_3(a)}{\pi a} + \int_0^\infty \alpha\left[I_0(\alpha a) - L_0(\alpha a)\right] A(\alpha)\, d\alpha\right\}. \qquad (13)$$

Приравнивая значение коэффициента интенсивности напряжений (13) к критической величине $(K_{III} = K_c)$ по теории хрупкого разрушения ([6]), получается выражение, которое определяет распространение трещины и ее устойчивость.

Институт механики Академии наук Армении

Վ. Ս. ՏՈՆՈՅԱՆ, Ն. Ս. ՄԵԼՔՈՒՄՅԱՆ

Կիսահարթության եզրից սկսվող ուղղաձիգ ճաքով առաձգական կիսահարթության համար հակահարթ կոնտակտային խնդիր

Դիտարկվում է հակահարթ կոնտակտային խնդիր առաձգական, իզոտրոպ կիսահարթության համար, որն ունի եզր դուրս եկող ուղղաձիգ, վերջավոր ճաք։ Կիսահարթության հորիզոնական սահմանի երկու կողմերում, ճաքի եզրից սկսած ամրակցված են վերջավոր չափերի սիմետրիկ կոշտ դրոշմներ։

Ընդունվում է, որ դրոշմների վրա ազդում են հակահարթ դեֆորմացիոն վիճակի հանգեցնող ուժեր։

Խնդիրը լուծված է Ֆուրյեի մեթոդով տեղափոխությունների համար։

Շնորհիվ խնդրի չեղահամաչափության, բավական է դիտարկել միայն քառորդ հարթությունը խառը եզրային պայմաններով։

Խնդրի լուծումը փնտրվում է Ֆուրյեի ինտեգրալների գումարի տեսքով։ Ֆուրյեի ինտեգրալների ինտեգրման անհայտ ֆունկցիաները որոշելու համար ստացվում է զույգ ինտեգրալ հավասարումների համակարգ։ Զույգ ինտեգրալ հավասարումները լուծվում են օրթոգոնալիզացիայի մեթոդով փակ տեսքով և ստացված համակարգը բերվում է երկրորդ կարգի Ֆրեդգոլմի տիպի ինտեգրալ հավասարման։ Ապացուցված է այդ հավասարման լուծելիությունը։ Մասնավորապես, լուծումը կարող է գտնվել հաջորդական մոտավորությունների եղանակով։ Ինտեգրման անհայտ ֆունկցիաները որոշելուց հետո կարելի է որոշել լարումները և տեղափոխությունները կիսահարթության ցանկացած կետում։

Ստացված են ճաքից դուրս լարումների և ճաքի ներսում տեղափոխությունների որոշման համար բանաձևեր։ Առանձնացված է եզակիությունը և հաշվարկված է լարումների ինտենսիվության գործակիցը ճաքի գագաթում։

Ըստ նյութի փխրուն քայքայման տեսության լարումների ինտենսիվության գործակիցը հավասարեցնելով կրիտիկական արժեքին, ստացված է արտահայտություն ճաքի տարածումը և նրա կայունությունը որոշելու համար։

Մասնավոր դեպքում, երբ ճաքի երկարությունը ձգտում է զրոյի ստացված է առաձգականության տեսության հակահարթ խնդրի փակ լուծումը առանց ճաքի կիսահարթության համար։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *В. Новацкий*, Теория упругости, Мир, М., 1975. [2] *Я. С. Уфлянд*, Метод парных уравнений в задачах математической физики. Наука, Л., 1977. [3] *В. С. Тоноян*, Изв. АН АрмССР. Механика, т. 21, № 3 (1968). [4] *В. С. Тоноян*, ДАН АрмССР, т. 37, № 5 (1963). [5] *В. С. Тоноян, С. А. Мелкумян*, Изв. АН АрмССР. Механика, т. 25, № 3, 1972. [6] *Г. П. Черепанов*, Механика хрупкого разрушения, Наука, М., 1974.