ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ
Том 93 1992 № 1

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

УДК 539.3

Ю. А. Антипов, академик АН Армении Н. Х. Арутюнян

О принципе соответствия при кручении неоднородных тел вращения

(Представлено 24/V 1991)

Пусть Ω — упругое тело вращения вокруг оси Oz кусочно-гладкой кривой, составленное из двух материалов с модулями сдвига G_+ $(z>0)$ и G_- $(z<0)$, и плоскость $z=0$ — плоскость симметрии для области Ω. К поверхности $\partial\Omega$ приложены касательные окружные усилия $\tau_{\varphi n}$. Тогда отличные от нуля компоненты тензора напряжений будут иметь вид [1]

$$\tau_{\varphi r}=G(z)\,r\frac{\partial\Psi}{\partial r},\qquad \tau_{\varphi z}=G(z)\,r\frac{\partial\Psi}{\partial z},\qquad \Psi=\frac{v}{r},\tag{1}$$

$G(z)=G_\pm$, если $z \gtrless 0$, v — угловое смещение, Ψ — функция перемещения, для которой уравнения Ляме принимают следующий вид:

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial r^2}+\frac{3}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial r}+\frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2}=\rho_0\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2},\qquad (r,z)\in\Omega,\quad t>0,\tag{2}$$

где $\rho=\rho_0 G(z)$ — плотность тела. Требуется найти решение уравнения (2), удовлетворяющее начальным условиям

$$v|_{t=0}=0,\quad \left.\frac{\partial v}{\partial t}\right|_{t=0}=0,\qquad (r,z)\in\overline{\Omega},\tag{3}$$

граничному условию ($T_n(r,z,t)$ — нечетная по z функция)

$$\tau_{\varphi n}=G(z)\,r\frac{\partial\Psi}{\partial n}=rT_n(r,z,t),\qquad (r,z)\in\partial\Omega,\quad t\geqslant 0\tag{4}$$

и условиям сопряжения

$$v|_{z=-0}=v|_{z=+0},\qquad \tau_{z\varphi}|_{z=-0}=\tau_{z\varphi}|_{z=+0},\qquad 0\leqslant r\leqslant R,\quad t\geqslant 0,\tag{5}$$

где R — радиус поперечного сечения тела при $z=0$.

При помощи преобразования Лапласа

$$\{\Psi_p,\ T_{np}\}(r,z)=\int_0^\infty e^{-pt}\{\Psi,\ T_n\}(r,z,t)\,dt,\qquad \mathrm{Re}(p)>0$$

на основании (1)–(5) получаем следующую разрывную краевую задачу:

$$L\Psi_p = 0, \quad (r, z) \in \Omega,$$

$$Lf = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{3}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - \rho_0 p^2 f; \quad \frac{\partial \Psi_p}{\partial n} = \frac{T_{\text{пр}}}{G(z)}, \quad (r, z) \in \partial\Omega,$$

$$\Psi_p\big|_{z=-0} = \Psi_p\big|_{z=+0}, \quad G_- \frac{\partial \Psi_p}{\partial z}\bigg|_{z=-0} = G_+ \frac{\partial \Psi_p}{\partial z}\bigg|_{z=+0}, \quad 0 \leqslant r \leqslant R. \tag{6}$$

Пусть $\Gamma_p(r, z, \xi, \zeta)$ — функция Грина задачи Неймана для оператора эллиптического типа L в области $\Omega^+ = \{(r, z) \in \Omega: \ z > 0\}$ при условии

$$\frac{\partial \Psi_p}{\partial n} = \frac{T_{\text{пр}}}{G_+}, \quad (r, z) \in \omega^+; \quad \frac{\partial \Psi_p}{\partial z} = \frac{\varphi_p(r)}{G_+}, \quad (r, z) \in S.$$

$$\omega^+ = \{(r, z) \in \partial\Omega: \ z > 0\}, \quad S = \{0 < r < R, \ z = 0\}.$$

Тогда решение задачи (6) с учетом симметрии области Ω примет вид

$$\pm G_\pm \Psi_p(r, \ \pm z) = \int\limits_{\omega^+} \Gamma_p(r, z, \xi, \zeta)\, T_{\text{пр}}(\xi, \zeta)\, d\omega^+ +$$

$$+ \int\limits_S \Gamma_p(r, z, \xi, 0)\, \varphi_p(\xi)\, dS, \tag{7}$$

где функция $\varphi_p(\xi)$ — решение интегрального уравнения

$$2\pi \int\limits_0^R \Gamma_p(r, 0, \xi, 0)\, \varphi_p(\xi)\, \xi d\xi = -\int\limits_{\omega^+} \Gamma_p(r, 0, \xi, \zeta)\, T_{\text{пр}}(\xi, \zeta)\, d\omega^+$$

$$(0 \leqslant r < R).$$

При помощи обратного преобразования Лапласа, (1) и (7) находим формулы для касательных напряжений

$$\tau_{\varphi r} = \pm r \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\gamma \Phi_p(r, \ \pm z)\, e^{pt}\, dp,$$

$$\tau_{\varphi z} = \pm r \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\gamma \Phi_p(r, \ \pm z)\, e^{pt}\, dp,$$

$$\gamma: \ \mathrm{Re}(p) = h > 0, \quad \Phi_p(r, \ \pm z) = \pm G_\pm \Psi_p(r, \ \pm z).$$

Таким образом можно сформулировать следующий принцип соответствия.

Пусть в области Ω модуль сдвига $G(z)=G_+$ при $z>0$ и $G(z)=G_-$ при $z<0$, $\rho_0=\text{const}$ и на поверхности тела $\partial\Omega$ функция $T_n(r, z, t)$ нечетна по z. Тогда поле напряжений при нестационарном кручении составного тела вращения, для которого плоскость раздела сред является одновременно и плоскостью симметрии, совпадает с полем напряжений в соответствующем однородном теле, а поле перемещений зависит от G_+ и G_- и имеет вид

$$v(r, \pm z, t)=\pm\frac{r}{G_\pm}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\Phi_p(r, \pm z)e^{pt}\,dp.$$

Разумеется, что сформулированный выше принцип соответствия справедлив для неоднородных тел вращения и в случае воздействия статической нагрузки. В качестве примеров рассмотрим кручение соответственно цилиндра, эллипсоида и шара с кольцевой трещиной в статической постановке.

1. *Цилиндр.* Пусть круговой цилиндр $(0\leqslant r\leqslant R,\ 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi,\ -a\leqslant z\leqslant b)$ скручивается касательными усилиями, приложенными на торцах. Боковая поверхность свободна от напряжений. Задача эквивалентна краевой задаче (M—величина крутящего момента):

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}-\frac{v}{r^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}=0,\qquad 0<r<R,\quad -a<z<b;$$

$$\left.\frac{\partial v}{\partial z}\right|_{z=-a}=m_-\delta(r-R_0),\qquad \left.\frac{\partial v}{\partial z}\right|_{z=b}=m_+\delta(r-R_0),\qquad 0\leqslant r<R;\quad (8)$$

$$m_\pm=\frac{M}{2\pi R_0^2 G_\pm}\quad (0<R_0<R),\ \left(\frac{\partial v}{\partial r}-\frac{v}{r}\right)_{r=R}=0,\quad -a\leqslant z\leqslant b;$$

$$v|_{z=-0}=v|_{z=+0},\qquad G_-\left.\frac{\partial v}{\partial z}\right|_{z=-0}=G_+\left.\frac{\partial v}{\partial z}\right|_{z=+0},\qquad 0\leqslant r\leqslant R.$$

Применяем к задаче (8) интегральное преобразование

$$v_k(z)=\int\limits_0^R vJ_1(\lambda_k r)\,r\,dr,\qquad v(r, z)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{v_k(z)}{\sigma_k}J_1(\lambda_k r),$$

$$\lambda_k=R^{-1}\xi_k,\qquad \sigma_k=\frac{1}{2}R^2J_1(\xi_k)J_2(\xi_k),\qquad J_2(\xi_k)=0\quad (k=1, 2, \ldots)$$

и находим формулы для трансформанты смещения и касательных напряжений, причем последние не зависят от G_+, G_- тогда и только тогда, когда $a=b$. В этом случае имеем

$$v_k(z)=M(\pi R_0 G(z)\lambda_k\operatorname{sh}2\lambda_k a)^{-1}J_1(\lambda_k R_0)\operatorname{sh}\lambda_k a\operatorname{sh}\lambda_k z,\qquad |z|<a.$$

2. *Сплюснутый эллипсоид вращения.* В вырожденных эллипсоидальных координатах (s, μ, φ)

$$r = a(1+s^2)^{1/2}(1-\mu^2)^{1/2}, \quad z = as\mu, \quad 0 \leqslant s < \infty, \quad |\mu| \leqslant 1$$

задача кручения составного сплюснутого эллипсоида вращения эквивалентна следующей краевой задаче ([2]):

$$(1+s^2)\frac{\partial^2\Psi}{\partial s^2} + 4s\frac{\partial\Psi}{\partial s} + (1-\mu^2)\frac{\partial^2\Psi}{\partial\mu^2} - 4\mu\frac{\partial\Psi}{\partial\mu} = 0, \tag{9}$$

$$0 < s < s_0, \quad |\mu| < 1,$$

$$\Psi(0, \mu) = \Psi(0, -\mu), \quad G_+\frac{\partial\Psi}{\partial s}(0, \mu) = G_-\frac{\partial\Psi}{\partial s}(0, -\mu), \quad |\mu| \leqslant 1, \tag{10}$$

$$\Psi(s, +0) = \Psi(s, -0), \quad G_+\frac{\partial\Psi}{\partial\mu}(s, +0) = G_-\frac{\partial\Psi}{\partial\mu}(s, -0),$$

$$0 \leqslant s \leqslant s_0,$$

$$\left.\frac{\partial\Psi}{\partial s}\right|_{s=s_0} = \frac{T_*(\mu)}{G(\mu)}, \quad |\mu| \leqslant 1; \quad T_*(\mu) = \left(\frac{s_0^2+\mu^2}{1-\mu^2}\right)^{1/2}\frac{T(\mu)}{1+s_0^2},$$

$$G(\mu) = G_\pm, \quad \mu \gtrless 0, \quad s_0 = a^{-1}b_2, \quad a = (b_1^2 - b_2^2)^{1/2},$$

b_1, b_2—полуоси эллипса, вращением которого вокруг оси Oz образуется эллипсоид. Касательные напряжения связаны с функцией перемещения Ψ формулами

$$\tau_{s\varphi} = \frac{Gr}{H_s}\frac{\partial\Psi}{\partial s}, \quad \tau_{\mu\varphi} = \frac{Gr}{H_\mu}\frac{\partial\Psi}{\partial\mu},$$

$$H_s = a(s^2+\mu^2)^{1/2}(s^2+1)^{-1/2}, \quad H_\mu = a(s^2+\mu^2)^{1/2}(1-\mu^2)^{-1/2}.$$

Пусть $\Psi = \Psi_\pm$, $\mu \gtrless 0$. Методом разделения переменных находим общее решение уравнения (9)

$$\Psi_\pm(s, \mu) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m^\pm C_m^{3/2}(\mu)\, C_m^{3/2}(is),$$

где $C_m^{3/2}(x)$ — многочлены Гегенбауэра. Полагая

$$T_*(\mu) = G_\pm T_0(\mu) + T_1(\mu), \quad \mu \gtrless 0;$$

$$T_0(\mu) = T_0(-\mu), \quad T_1(\mu) = -T_1(-\mu)$$

и удовлетворяя условиям (10), получаем выражения для коэффициентов

$$A_{2m}^\pm = A_{2m}, \quad G_\pm A_{2m+1}^\pm = A_{2m+1},$$

$$A_{2m+j} = 2\left[i\nu_{2m+j}\,\sigma_{2m+j}(is_0)\right]^{-1} T_{j,2m+j},$$

$$\sigma_n(s) = \frac{d}{ds} C_n^{3/2}(s) \qquad \nu_n = \frac{(n+1)(n+2)}{n+3/2},$$

$$T_{1n} = \int_0^1 T_1(\mu)\, C_n^{3/2}(\mu)(1-\mu^2)\, d\mu.$$

В случае нечетной нагрузки: $T(\mu) = -T(-\mu)$ имеем $T_0(\mu) = 0$, $A_{1n} = 0$ и тогда касательные напряжения не зависят от G_+, G_-.

3. *Тело вращения с трещиной.* Пусть Ω—тело вращения, имеющее в плоскости симметрии трещину (дискообразную, кольцевую или их систему) и пусть выполняются условия принципа соответствия. Тогда коэффициент интенсивности напряжений K_{III} не зависит от модулей сдвига G_+, G_-. В частности, в случае кольцевой трещины ($b < r < a$, $\theta = \pi/2 \pm 0$) в составном шаре радиуса a, который скручивается касательными окружными усилиями с моментом M, приложенными вдоль параллелей $\theta = \theta_0$, $\theta = \pi - \theta_0$, имеем ([3])

$$K_{III} = -3/4\, \pi^{-1/2} a^{-1/2} M \lambda^{-1/2} (1 - 8/3\, \pi^{-1} \lambda^3 + O(\lambda^5)), \quad \lambda = ba^{-1} \to 0.$$

Одесский государственный университет
им. И. И. Мечникова

ՅՈՒ. Ա. ԱՆՏԻՊՈՎ, Հայաստանի ԳԱ ակադեմիկոս Ն. Խ. ՀԱՐՈՒԹՅՈՒՆՅԱՆ

Անհամասեռ պտտման մարմինների ոլորման դեպքում համապատասխանության սկզբունքի մասին

Ապացուցվում է համապատասխանության հետևյալ սկզբունքը. եթե երկու նյութերից կազմված կտոր առ կտոր ողորկ մակերևույթով պտտման առաձգական մարմինը, որի համար նրա բաղադրիչ մասերը բաժանող հարթությունը միաժամանակ հանդիսանում է նաև սիմետրիայի հարթություն, այդ դեպքում այդ մարմնի ոչ ստացիոնար ոլորման դեպքում լարումների դաշտը համընկնում է համապատասխան համասեռ մարմնի ոլորման ժամանակ առաջացած լարումների դաշտի հետ։ Որպես օրինակ դիտարկվել են գլանի, էլիպսոիդի և օղակաձև ճաքով գնդի ոլորման խնդիրները։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1 *Н. Х. Арутюнян, Б. Л. Абрамян*, Кручение упругих тел, Физматгиз, М., 1963. 2 *А. И. Лурье*, Теория упругости, Наука, М., 1970. 3 *Ю. А. Антипов, Н. Х. Арутюнян*, Изв. АН СССР, МТТ, № 4, 1991.