ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXXIII 1986 5

УДК 519.21

МАТЕМАТИКА

Р. Э. Даян

Об оценивании параметра в процессе Пуассона неограниченной интенсивности

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. В. Амбарцумяном 25/XI 1985)

1. Пусть $X(t):t\geqslant 0$ неоднородный процесс Пуассона интенсивности $S(t+\theta)$, где $S(t)$—положительная периодическая функция с периодом τ и $\theta\in(\alpha,\beta)$, $0<\alpha<\beta<\tau$. Ставится задача оценивания параметра θ по наблюдениям $X_T=\{X(t),\ 0\leqslant t\leqslant T\}$ при $T\to\infty$. Свойства оценок определяются гладкостью функции $S(t)$. В случае, когда существует информационное количество $I=\int\limits_0^T S'(t)^2S(t)^{-1}dt=\frac{T}{\tau}\times$

$$\times\int\limits_0^\tau S'(t)^2S(t)^{-1}dt(1+0(1))=\frac{T}{\tau}I_f(1+0(1)),$$

в ([1]) доказана состоятельность и асимптотическая нормальность оценки максимального правдоподобия $\hat{\theta}_T$ (ниже $L\{\zeta\}$—функция распределения ζ): $L\{(\hat{\theta}_T-\theta)\sqrt{T}\}\Rightarrow\Rightarrow N(0,\ rI_f)$.

Эта же оценка, но в случае, когда $S(t)$ имеет разрывы первого рода, при $T\to\infty$ в пределе имеет не гауссовское распределение и с другой нормировкой ([2]): величина $(\hat{\theta}_T-\theta)T$ асимптотически не вырождена.

Случай, когда $S(t)=A|t-\tau_0|^\alpha+r(t-\tau_0)$ в некоторой окрестности точки τ_0, где $\tau_0\in(0,\tau)$, $A\neq 0$, $0<\alpha<\frac{1}{2}$ и $r(t)$ непрерывно дифференцируемая, рассмотрен в статье ([3]).

В настоящей работе исследуется случай, когда $S(t)$ допускает представление $S(t)=f(t-\tau_0)|t-\tau_0|^\alpha$, где $-1<\alpha<0$ и $f(t)$ непрерывно дифференцируемая функция, удовлетворяющая условию $M_1<f(t)<<M_2$, где M_1, M_2 положительные константы.

Нас будут интересовать асимптотические свойства (обобщенных) байесовских оценок $\tilde{\theta}_T$ параметра θ относительно квадратической функции потерь с априорной плотностью $\pi(u)$. Показано, что байесовская оценка при $T\to\infty$ имеет невырожденное распределение со следующей нормировкой: $(\tilde{\theta}_T-\theta)T^{1/1+\alpha}$.

2. Считаем, что функция $S(t)$ положительная, периодическая с периодом τ, непрерывно дифференцируемая всюду за исключением

точек $\tau_0+k\tau$, где $\tau_0\in(0,\tau)$, $k=0, 1, 2, \ldots$. Предполагаем, что существует некоторая окрестность U точки τ_0, где функция $S(t)$ представима в виде $S(t)=f(t-\tau_0)|t-\tau_0|^{\alpha}$, где $-1<\alpha<0$ и $f(t)$ непрерывно дифференцируемая функция, удовлетворяющая условию $M_1<f(t)<M_2$, где M_1, M_2—положительные константы.

Пусть $Z_1(u)$ случайный процесс вида $Z_1(u)=\exp\{Y(u)\}$, $u\in(-\infty, \infty)$ и конечномерные распределения $Y(u)$ зададим с помощью характеристических функций $g_j(\vec{u}, i\vec{t})=E\exp\left\{\sum_{j=1}^{m} it_j Y(u_j)\right\}=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\prod_{j=1}^{m}\left|1+\frac{u_j}{y}\right|^{i\alpha\lambda_j}-1\right]|y|^{\alpha}dy$. Случайная величина ξ_2 определяется по формуле $\xi_2=\int_{-\infty}^{\infty}uZ_1(u)du\left(\int_{-\infty}^{\infty}Z_1(u)du\right)^{-1}$. Процесс $Z_1(u)$ есть частный случай процесса, введенного в работе [4], в которой исследовалось поведение статистических оценок параметра сдвига для выборок с неограниченной плотностью.

Ниже K—произвольный компакт, $K\subset(\alpha, \beta)$ и

$$\varphi_T=\left(\frac{\tau}{Tf(0)}\right)^{1/\gamma}\quad \gamma=1+\alpha.$$

Теорема. *Если функция* $\pi(u)$ $u\in[\alpha, \beta]$ *непрерывная и положительная, то для байесовской относительно квадратической функции потерь оценки* $\tilde{\theta}_T$ *равномерно по* $\theta\in K$ *справедливы соотношения*

$$P_\theta \lim\tilde{\theta}_T=\theta \quad L_\theta\{(\theta_T-\tilde{\theta})\varphi_T^{-1}\}=L\{\xi_2\}$$

$$\lim_{T\to\infty}E_\theta|(\tilde{\theta}_T-\theta)\varphi_T^{-1}|^p=E|\xi_2|^p \text{ для любого } p>0.$$

Доказательство теоремы проводится по методу, предложенному в [4], и опирается на ряд лемм.

Лемма 1. *Для любого* h, $|h|<\tau_1$, $\tau_1<\tau$ *существует* $C_1>0$ *такое, что* $\int_0^{\tau}[\sqrt{S(t+h)}-\sqrt{S(t)}]^2dt\leqslant C_1|h|^{\gamma}$

Доказательство леммы 1 аналогично доказательству леммы 1 из [3].

Лемма 2. *Для любого* h, $|h|<\tau_1$, $\tau_1<\tau$ *существует* $C_2>0$ *такое, что* $\int_0^{\tau}[\sqrt{S(t+h)}-\sqrt{S(t)}]^2dt\geqslant C_2|h|^{\gamma}$

Доказательство леммы 2 аналогично доказательству леммы 2 из [3].

Отношение правдоподобия в нашей задаче имеет вид (см., например, [2])

$$Z_T(u)=\frac{dP^T_{\theta+\varphi_T u}}{dP^T_\theta}(X_T)=\exp\left\{\int_0^T \ln\frac{S(t+\theta+u\varphi_T)}{S(t+\theta)}\,dM(t)-\right.$$

$$\left.-\int_0^T\left[S(t+\theta+u\varphi_T)-S(t+\theta)-S(t+\theta)\ln\frac{S(t+\theta+u\varphi_T)}{S(t+\theta)}\right]dt\right\}, \qquad (1)$$

где $\quad M(t)=X(t)-\int\limits_0^t S(y+\theta)\,dy$

Здесь $P_\theta^{(T)}$—мера, наведенная процессом Пуассона $\{X(t),\ 0\leqslant t\leqslant T\}$ интенсивности $\{S(t+\theta),\ 0\leqslant t\leqslant T\}$ в пространстве его реализаций. Заметим, что в сделанных предположениях все меры семейства $\{P_\theta^{(T)},\ \theta\in\Theta\}$ эквивалентны.

Лемма 3. *Конечномерные распределения $Z_T(u)$, $u\in U_{\theta,T}$ при $T\to\infty$ сходятся к конечномерным распределениям процесса $Z_1(u)$, $u\in(-\infty,\infty)$ и сходимость эта равномерна по $\theta\in K$.*

Доказательство. Для определенности считаем $u>0$. Положим

$$\Phi_T(\lambda_1,\lambda_2)=E_\theta\exp\{i\lambda_1 Z_T(u_1)+i\lambda_2 Z_T(u_2)\}$$

$$Y_T(u)=\int_0^T\ln\frac{S(t+\theta+u\varphi_T)}{S(t+\theta)}\,dM(t);$$

$$G_T(\lambda_1,\lambda_2)=E_\theta\exp\{i\lambda_1 Y_T(u_1)+i\lambda_2 Y_T(u_2)\}.$$

Из доказательства леммы 4.2.1. в [2] имеем

$$G_T(\lambda_1,\lambda_2)=\int_0^T[\exp\{iR_T(t,\lambda_1,\lambda_2)\}-1-iR_T(t,\lambda_1,\lambda_2)]S(t+\theta)\,dt,$$

где $\quad R_T(t,\lambda_1,\lambda_2)=\lambda_1\ln\dfrac{S(t+\theta+u_1\varphi_T)}{S(t+\theta)}+\lambda_2\ln\dfrac{S(t+\theta+u_2\varphi_T)}{S(t+\theta)}$

Аналогично доказательству леммы 4 из [3] имеем

$$\lim G_T(\lambda_1,\lambda_2)=\lim_{T\to\infty}\frac{T}{\tau}\int_0^T[\exp\{iR_T(t,\lambda_1,\lambda_2]\}-1-iR_T(t,\lambda_1,\lambda_2)]S(t+\theta)\,dt$$

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{T}{\tau}\int_{\tau_0-\delta}^{\tau_0+\delta}[\exp\{iR_T(t,\lambda_1,\lambda_2)\}-1-iR_T(t,\lambda_1,\lambda_2)]S(t+\theta)\,dt.$$

Здесь используется периодичность функции $S(t)$ и гладкость $S(t)$ вне особой точки.

Далее

$$\int_{\tau_0+\delta}^{\tau_0+\delta}[\exp\{iR(t,\lambda_1,\lambda_2)\}-1-iR(t,\lambda_1,\lambda_2)]S(t+\theta)\,dt=$$

$$= \varphi_T^{\gamma} \int\limits_{-\delta/\varphi_T}^{\delta/\varphi_T} \left[\prod_{j=1}^{2} \left(\frac{f(y\varphi_T + u_j\varphi_T)|y+u_j|^{\alpha}}{f(y\varphi_T)|y|^{\alpha}} \right)^{n_j} - 1 - \right.$$

$$\left. - \sum_{j=1}^{2} \lambda_j \ln \frac{f(y\varphi_T + u_j\varphi_T)|y+u_j|^{\alpha}}{f(y\varphi_T)|y|^{\alpha}} \right] f(y\varphi_T)|y|^{\alpha} dy$$

Следовательно,

$$\lim_{T\to\infty} G_T(\lambda_1, \lambda_2) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left[\prod_{j=1}^{2} \left| 1 + \frac{u_j}{y} \right|^{i\alpha\lambda_j} - 1 - i \sum_{j=1}^{2} \lambda_j \ln \left| 1 + \frac{u_j}{y} \right|^{\alpha} \right] |y|^{\alpha} dy.$$

Исследуем теперь предельное поведение второго интеграла в формуле отношения правдоподобия (1)

$$\lim_{T\to\infty} \int\limits_0^T \left[S(t+\theta+u\varphi_T) - S(t+\theta) - S(t+\theta) \ln \frac{S(t+\theta+u\varphi_T)}{S(t+\theta)} \right] dt =$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{T}{\tau} \int\limits_{\tau_0-\delta}^{\tau_0+\delta} \left[S(t+\theta+u\varphi_T) - S(t+\theta) - S(t+\theta) \ln \frac{S(t+\theta+u\varphi_T)}{S(t+\theta)} \right] dt$$

В окрестности точки τ_0

$$\int\limits_{-\delta}^{\delta} \left[f(t+u\varphi_T)(t+u\varphi_T)^{\alpha} - f(t)|t|^{\alpha} - f(t)|t|^{\alpha} \ln \frac{f(t+u\varphi_T)|t+u\varphi_T|^{\alpha}}{f(t)|t|^{\alpha}} \right] dt =$$

$$\varphi_T \int\limits_{-\delta/\varphi_T}^{\delta/\varphi_T} \left[f(y\varphi_T)|y+u\varphi_T)|y+u|^{\alpha} - f(y\varphi_T)|y|^{\alpha} - f(y\varphi_T)|y|^{\alpha} \ln \frac{f(y\varphi_T + u\varphi_T)|y+u|^{\alpha}}{f(y\varphi_T)|y|^{\alpha}} \right] dt$$

Поэтому

$$\lim_{T\to\infty} \int\limits_0^T \left[S(t+\theta+u\varphi_T) - S(t+\theta) - S(t+\theta) \ln \frac{S(t+\theta+u\varphi_T)}{S(t+\theta)} \right] dt =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left[|y+u|^{\alpha} - |y|^{\alpha} - |y|^{\alpha} \ln \frac{|y+u|^{\alpha}}{|y|^{\alpha}} \right] dy = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |y|^{\alpha} \ln \frac{|y+u|^{\alpha}}{|y|^{\alpha}} dy.$$

Откуда получаем сходимость двумерных распределений $Z_T(u)$ к двумерным распределениям $Z_1(u)$. Аналогично устанавливается сходимость любых конечномерных распределений.

Лемма 4. *В сделанных предположениях*

$$E_{\theta} |Z_T^{1/2}(u_2) - Z_T^{1/2}(u_1)|^2 \leq C_3 |u_2 - u_1|^{\gamma}$$

Доказательство леммы 4 аналогично доказательству леммы 5 из ([3]).

Лемма 5. *В сделанных предположениях*

$$P_{\theta}\{Z_T(u) > e^{-c_4|u|^{\gamma}}\} \leq e^{-c_4|u|^{\gamma}}.$$

Доказательство леммы 5 аналогично доказательству леммы 6 из ([3]).

Свойства отношения правдоподобия, установленные в леммах 3—5, позволяют воспользоваться теоремой 10.2 из ([5]), что завершает доказательство теоремы.

АрмНИИПроцветмет

Ռ. Է. ԴԱՅԱՆ

Պուասոնի պրոցեսի ոչ սահմանափակ ինտենսիվության պարամետրի գնահատման մասին

Նկարագրված է պարբերական Պուասոնի պրոցեսի ոչ սահմանափակ ինտենսիվության պարամետրի Բայեսյան գնահատականի ասիմպտոտիկ վարքը։ Ցույց է տրված, որ Բայեսյան գնահատականը սահմանում ունի հետևյալ նորմավորման չվերասերված բաշխումը՝

$$(\tilde{\theta}_T - \theta) T^{\frac{1}{1+\sigma}} ։$$

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Ю. А. Кутоянц*, Problems of Control and Information Theory, v. 8, № 2 (1979). [2] *Ю. А. Кутоянц*, Оценивание параметров случайных процессов, Ереван, Изд. АН АрмССР, 1980. [3] *Р. Э. Даян*, Изв. АН АрмССР. Математика, т. 22, № 2 (1987). [4] *И. А. Ибрагимов, Р. З. Хасьминский*, Зап. науч. семинаров ЛОМИ, т. 55, с. 175—184 (1976). [5] *И. А. Ибрагимов, Р. З. Хасьминский*, Асимптотическая теория оценивания, Наука, М., 1979.