ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXXIII 1986 3

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

УДК 518.9

В. В. Гандилян

Математические методы управления экологическими процессами

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. В. Касьяном 18/IV 1985)

Современные математические модели, описывающие экосистему, можно разделить на две группы: имитационные и аналитические. Одни модели описывают конкретные экосистемы (водные, лесные и т. д.), другие являются более универсальными, т. е. могут использоваться для разных экосистем. К последним моделям относятся модели Вольтерра—Лотки [1].

Проблемы охраны окружающей среды и рационального использования природных ресурсов привели к быстрому развитию математических методов управления экосистемами. Эти проблемы подробно исследуются, например, в работах [2-4]. В большинстве работ основным критерием управления является максимально эффективное использование природных ресурсов. Однако при этом может нарушиться гармоничность развития экосистемы, которая в дальнейшем не восстановима или восстановима, но при больших дополнительных затратах. Ниже мы, вводя новые условия экологического равновесия, предлагаем математическую модель и рассматриваем классы управлений, сохраняющие экологическое равновесие.

Пусть в данном регионе обитают n популяций разных видов. Численность популяций i-того вида в момент времени t обозначим $X_i(t)$, $i=\overline{1, n}$. Обычно популяции двух различных видов или питаются одной и той же пищей, или же один вид (назовем его «хищники») живет за счет другого («жертв»). В модели Вольтерра—Лотки [1] типа хищник-жертва одно из предположений таково, что встреча хищника и жертвы создает возможность мгновенного (или с некоторым запаздыванием) увеличения популяции хищника. Мы же предполагаем изменить гипотезу следующим образом: при встрече «хищника» и «жертвы» возникает возможность сохранения популяции «хищника».

Рассмотрим виды i, j, число встреч которых за время dt равно $m_{ij}X_i(t)X_j(t)dt$. За это время истребляется $P_{ij}m_{ij}X_i(t)X_j(t)dt$ индивидуумов типа i, где P_{ij}—вероятность истребления одного индивидуума вида i при встрече с одним индивидуумом вида j. Среднюю биомассу индивидуума вида j обозначим β_j. Пусть δ_i—количество пищи, необходимое для существования индивидуума популяции i-того вида в единицу времени. Количество пищи, которое добывает вся популяция i-того вида за время dt, равно $\sum_{j=1}^{n} \beta_j a_{ji} X_j(t) X_i(t) dt$ (где

$a_{ji}=m_{ji}P_{ji}$). А объем пищи, необходимый для сохранения всей популяции i-того вида за время dt, равен $\delta_i x_i(t)dt$. Если $\sum_{j=1}^{n}\beta_j a_{ji} X_j(t)\times$ $\times X_i(t)dt<\delta_i X_i(t)dt$ (это означает, что добываемая пища меньше необходимой пищи), тогда количество индивидуумов популяции i-того вида, которые погибают от нехватки пищи в момент времени t, равно $(\delta_i X_i(t)-\sum_{j=1}^{n}\beta_j a_{ji} X_j(t) X_i(t))/\delta_i$. Предположим далее, что существует m вторичных ресурсов (это могут быть лесные, водные и т. д.), необходимых для существования популяций. Скорость поступления этих ресурсов задается постоянным вектором $\rho=(\rho_1,\ldots,\rho_m)$. Обозначим через γ_{is} количество ресурса s-го типа, которое необходимо в единицу времени для существования индивидуума i-того вида. Если $\sum_{i=1}^{n}\gamma_{is}X_i(t)>\rho_s$ (это означает нехватку s-го вида ресурса), то некоторое количество индивидуумов из разных популяций вымирает. Пусть l_{is}—относительная активность одного индивидуума популяции i-того вида по сравнению с индивидуумами остальных видов по добыче s-го вида ресурса, где $l_{is}\geqslant 0$, $\sum_{i=1}^{n} l_{is}=1$, $i=\overline{1,n}$. Тогда относительная активность всей популяции i-того вида, по сравнению с остальными видами популяций, равна $l_{is}X_i/(\sum_{j=1}^{n} l_{js}X_j)$. Часть популяции i-того вида, которая вымирает от нехватки s-го вида ресурса, равна $(\gamma_{is}X_i-l_{is}\rho_s/(\sum_{j=1}^{n} l_{js}X_j))/\gamma_{is}$.

Определение. *Мы будем говорить, что система находится в состоянии экологического равновесия, если в каждый момент времени выполняются условия*

$$\sum_{j=1}^{n}\beta_j a_{ji}X_jX_i\geqslant\delta_iX_i(t),\quad i=\overline{1,\ n}; \tag{1}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\gamma_{is}X_i\leqslant\rho_s,\quad s=\overline{1,\ m}; \tag{2}$$

$$X_i\geqslant\overline{X}_i>0, \tag{3}$$

где $\overline{X}_i$ – минимальная численность популяции i-того вида.

Через $\varepsilon_i dt$ обозначим средний прирост биомассы одного индивидуума популяции i-того вида за время dt (т. е. разность между рождаемостью и смертностью). Если система находится в состоянии экологического равновесия, то динамика описывается уравнением

$$dX_i=X_i\varepsilon_i dt-\sum_{j=1}^{n}a_{ij}X_i(t)X_j(t)dt,\quad i=\overline{1,\ n}$$

или

$$\dot{X}_i=\left(\varepsilon_i-\sum_{j=1}^{n}a_{ij}X_j(t)\right)X_i(t),\quad i=\overline{1,\ n}. \tag{4}$$

Допустим, что из системы неравенств (1) неравенство не выполняется, в то же время (2) и (3) выполняются. Тогда динамика изменения численности популяции i-того вида выглядит так:

$$\dot{X}_i = \left(\varepsilon_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}X_j - \left(\delta_i - \sum_{j=1}^{n} (\beta_j a_{ji} X_j)/\beta_i\right)\right) X_i =$$

$$= \left(\varepsilon_i - 1 - \left(\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\delta_i - \beta_j a_{ji}\right)X_j\right)\Big/\beta_i\right) X_i. \quad (5)$$

Если имеет место (1) и (3) и s-ое неравенство из (2) не выполняется, то (4) принимает следующий вид:

$$\dot{X}_i = \left(\varepsilon_i - 1 - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}X_j + l_{is}\rho_s \Big/ \left(\gamma_{is} \sum_{j=1}^{n} l_{js}X_j\right)\right) X_i. \quad (6)$$

И, наконец, если имеет место (3) и не выполняется i-тое и s-ое неравенство из (1) и (2) соответственно, то динамика развития экологической системы имеет вид (6), кроме i-того вида, динамика которого будет

$$\dot{X}_i = \left(\varepsilon_i - 2 - \left(\sum_{j=1}^{n} (a_{ij}\delta_i - \beta_j a_{ji}) X_j\right)\Big/\delta_i + l_{is}\rho_s \Big/ \left(\gamma_{is} \sum_{j=1}^{n} l_{js}X_j\right)\right) X_i. \quad (7)$$

Аналогичные неравенства типа (1) и (2) были впервые предложены Л. А. Петросяном [2]. Нарушение одного из условий (1), (2) и (3) качественно меняет динамику развития экосистемы и, следовательно, важное значение имеет исследование условий, при которых система не выходит из состояния экологического равновесия.

Утверждение 1. *Если в экосистеме существует популяция i-того вида, которая не является „жертвой" для других видов ($a_{ij}=0$; $j=\overline{1, n}$), то для того чтобы система находилась в состоянии экологического равновесия при любом i, необходимо, чтобы* $\varepsilon_i = 0$.

Утверждение 2. *Для того чтобы система не вышла из состояния экологического равновесия, необходимо, чтобы*

$$\varepsilon_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\overline{X}_j > 0 \quad \textit{для любого} \quad i=\overline{1, n}.$$

Через K обозначаем множество векторов $\varphi=(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$, которое удовлетворяет неравенствам (1) и (2). Множество K—выпуклое, компактное множество в R^n. Рассмотрим следующее отображение $l(\varphi, t) = (l_1(\varphi, t), \ldots, l_n(\varphi, t)) : K \times [0, T] \to R^n_+$, где $l_i(\varphi, t) = \exp\left(\varepsilon_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\varphi_j\right)t$. Образ этого отображения обозначаем $E[K, [0, T]]$.

Теорема 1. *Для того чтобы на отрезке времени* $[0, T]$ *система находилась в состоянии экологического равновесия, достаточно выполнения следующих условий:*

1) $\min\limits_{d \in E[K, [0,T]]} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ji}\beta_j X_j^0 d_j - \delta_i\right) \geqslant 0; \quad i=\overline{1, n};$

2) $\max\limits_{d \in E[K; [0,T]]} \left(\sum_{i=1}^{n} \gamma_{is} X_i^0 d_i\right) \leqslant \rho_s; \quad s=\overline{1, m};$

3) $\min\limits_{d \in E[K, [0,T]]} (X_i^0 d_i - \overline{X}_i) \geqslant 0; \quad i=\overline{1, n},$

где $X_i^0 = X_i(0)$ и $d=(d_1, \ldots, d_n)$.

Управлением экологической системой является всякое внешнее воздействие на систему с целью изменения численности популяций. Под управлением мы будем понимать любой измеримый вектор функции $u(t)=(u_1(t), \ldots, u_n(t))$, где i-тый компонент относится к i-той популяции. Вектор $u(t)$ интерпретируется как изменение численности популяции в единицу времени. Если $u(t)\geqslant 0$, то взято соответственно уменьшение популяции, а в случае $u(t)\leqslant 0$—ее увеличение.

Управление $u(t)=(u_1(t), \ldots, u_n(t))$ будем называть допустимым на отрезке времени $[0, T]$, если при его применении на этом отрезке времени система остается в состоянии экологического равновесия.

Задача уменьшения численности популяции подразделяется на задачу эксплуатации (отлов рыб, отстрел ценных зверей и т. д.) и задачу подавления (борьба с вредителями, паразитами и т. д.). В обоих случаях преследуется экономическая цель получить в конечном итоге некоторый суммарный доход.

Увеличение численности некоторых видов популяций требует дополнительных затрат (капиталовложений).

Управление $u(t)=(u_1(t), \ldots, u_n(t))$ называем управлением 1-го типа, если $u_i(t)\geqslant 0$; $t\in[0, T]$; $i=\overline{1, n}$. При применении управления $u(t)=(u_1(t), \ldots, u_n(t))$ динамика экосистемы принимает вид $\dot{X}_i(t)=$ $=\left(\varepsilon_i-\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}X_j\right)X_i-u_i(t)$; $i=\overline{1, n}$.

Теорема 2. *Если функции* $r_i(t)$ $(i=\overline{1, n})$ *таковы, что*

$$1)\quad \min_{d\in E[K,[0,T]]} \sum_{j=1}^{n} a_{ji}\beta_{ij}X_j^0 \exp\left(-\int_0^t r_i(\xi)d\xi\right)d_j-\delta_i\geqslant 0;\quad i=\overline{1, n};$$

$$2)\quad \max_{d\in E[K,[0,T]]} \sum_{i=1}^{n} \gamma_{is}X_i^0 d_i \exp\left(-\int_0^t r_i(\xi)d\xi\right)\leqslant \rho_s;\quad s=\overline{1, m};$$

$$3)\quad \min_{d\in E[K,[0,T]]} \left(X_i^0 d_i \exp\left(-\int_0^t r_i(\xi)d\xi\right)-\overline{X}_i\right)\geqslant 0;\quad i=\overline{1, n};$$

$$4)\quad r_i(t)\geqslant 0;\quad t\in[0, T];\quad i=\overline{1, n},$$

то $u_i(t)=(-r_1(t)X_1(t), \ldots, -r_n(t)X_n(t))$ *допустимое управление первого типа.*

Ленинградский государственный университет

Վ. Վ. ՂԱՆԴԻԼՅԱՆ

էկոլոգիական պրոցեսների ղեկավարման մաթեմատիկական մեթոդներ

Աշխատանքում բերվում են էկոլոգիական հավասարակշռության նոր պայմաններ։ Դիտվում է «գիշատչի» տարատեսակի պահպանման հնարավորությունը նրա երկու տարատեսակների և «զոհի» հանդիպման ժամանակ։

Բերվում է համակարգը էկոլոգիական հավասարակշռության մեջ գտնվել անհրաժեշտ պայման։ Այնուհետև մտցվում է պայման, որի դեպքում համա կարգը դուրս չի գալիս էկոլոգիական հավասարակշռությունից։ Բերվում նաև համակարգը էկոլոգիական հավասարակշռության մեջ պահող բավ բար պայմաններ։

Որպես էկոլոգիական համակարգի ղեկավարում վերցվում է ամեն արտաքին ներգործություն համակարգի վրա, որի նպատակն է տարատեսա ների քանակական փոփոխությունը։ Աշխատանքում նկարագրվում է հնարա վոր ղեկավարումներից մեկը և տրվում է էկոլոգիական համակարգի դին միկան՝ ղեկավարման այդ տիպի ընտրության դեպքում։ Գտնվում է որոշա կի «թույլատրելի» ղեկավարումների մաթեմատիկական ներկայացումներ

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *В. Вольтерра*, Математическая теория борьбы за существование, М., Наук 1976. [2] *В. И. Зубов*, *Л. А. Петросян*, Математические методы планирования, Изд-ЛГУ, 1982. [3] *Ю. М. Свирежев*, *Е. Я. Елизаров*, Математическое модулирование би логических систем, Наука, М., 1972. [4] *К. Е. Уатт*, Экология и управление природн ми ресурсами, Мир, М., 1971.