ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXXI 1985 5

УДК 517.968.23

МАТЕМАТИКА

В. В. Асатрян

Об одном методе регуляризации систем сингулярных интегральных уравнений

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александряном 7/VII 1984)

В своей известной теореме эквивалентности ([1]) И. Н. Векуа достиг регуляризации одного сингулярного интегрального уравнения с помощью характеристического оператора. Методы, примененные в ([1]) для одного уравнения, нельзя непосредственно применить для систем сингулярных интегральных уравнений, так как условия разрешимости и единственности решения систем сингулярных интегральных уравнений непосредственно через коэффициенты системы не определяются.

В работе ([2]) Н. П. Векуа достиг регуляризации систем сингулярных интегральных уравнений с использованием задачи сопряжения для нескольких неизвестных функций и оценкой частных индексов, представляющей определенные трудности.

Ниже дается новый метод регуляризации систем сингулярных интегральных уравнений, при котором сперва решается однородная система, затем с помощью решений однородной системы регуляризируется неоднородная система.

Пусть L—совокупность конечного числа простых, гладких, замкнутых контуров, не имеющих общих точек. Рассмотрим нормальную систему сингулярных интегральных уравнений, написанную в виде векторно-матричного уравнения

$$K\varphi\equiv A(t_0)\varphi(t_0)+\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{K(t_0,t)\varphi(t)}{t-t_0}\,dt=f(t_0), \tag{1}$$

где t_0, t—аффиксы точек на линии L, $f(t)=\{f_1(t), f_2(t), \ldots, f_n(t)\}$—заданный n-мерный вектор, а $A(t)$, $K(t_0, t)$—квадратные матрицы n-го порядка с компонентами, принадлежащими классу Гельдера H при t, $t_0\in L$. Решение $\varphi(t)=\{\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t)\}$ уравнения (1) отыскивается в классе H.

Начнем с однородного уравнения

$$K\varphi=0, \tag{2}$$

где K—сингулярный оператор (1). Применяя к обеим частям уравнения (2) оператор K', союзный с оператором K, получим уравнение Фредгольма

$$K'K\varphi=0. \tag{3}$$

Очевидно, что уравнение (3) содержит все решения уравнения

(2), но обратное неверно. Найдем все решения уравнения (2), если известны все решения уравнения (3).

Пусть $\omega^1(t), \omega^2(t), \ldots, \omega^l(t)$—полная система линейно-независимых решений уравнения (3). Тогда любое решение уравнения (3) представляется в виде

$$\varphi = C_1\omega^1 + C_2\omega^2 + \ldots + C_l\omega^l, \tag{4}$$

где $C_1, C_2, \ldots, C_l$—произвольные постоянные.

Выберем эти постоянные так, чтобы φ явилось решением уравнения (2), т. е. чтобы выполнялось условие

$$C_1\theta^1 + C_2\theta^2 + \ldots + C_l\theta^l = 0, \tag{5}$$

где $\theta^i = K\omega^i$, $i = 1, 2, \ldots, l$.

Пусть p векторов из $\theta^1, \theta^2, \ldots, \theta^l$ линейно-независимы ($p \leq l$). Общность не нарушится, если предполагать, что линейно-независимы первые p векторов $\theta^1, \theta^2, \ldots, \theta^p$. Тогда векторы $\theta^{p+1}, \theta^{p+2}, \ldots, \theta^l$ можно выразить линейно через $\theta^1, \theta^2, \ldots, \theta^p$.

Пусть
$$\theta^{p+k} = \sum_{j=1}^{p} \alpha_{kj}\theta^j, \quad k = 1, 2, \ldots, l-p,$$

где α_{kj}—некоторые постоянные.

Подставляя выражения θ^{p+k} в (5) и учитывая линейную независимость $\theta^1, \theta^2, \ldots, \theta^p$, получим выражения постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_p$ через $C_{p+1}, C_{p+2}, \ldots, C_l$

$$C_j = -\sum_{k=1}^{l-p} \alpha_{kj} C_{p+k}, \quad j = 1, 2, \ldots, p.$$

Подставляя выражения $C_1, C_2, \ldots, C_p$ в (4) и сгруппировав, получим общее решение однородного уравнения (2)

$$\varphi = \sum_{k=1}^{l-p}\left(\omega^{p+k} - \sum_{j=1}^{p} \alpha_{kj}\omega^j\right)C_{p+k},$$

где $C_{p+1}, C_{p+2}, \ldots, C_l$—произвольные постоянные, а функции, стоящие в скобках, линейно-независимы.

Очевидно, что число линейно-независимых решений уравнения (2) равно $l-p$.

Для дальнейшего важна следующая

Лемма 1. *Для произвольной вектор-функции $\varphi(t) \in H$ существуют вектор-функция $\psi(t) \in H$ и постоянные $C_1, C_2, \ldots, C_n$ такие, чтобы*

$$\varphi = K'\psi + C_1\psi^1 + C_2\psi^2 + \ldots + C_n\psi^n, \tag{6}$$

где $\psi^i(t) = \overline{\varphi^i(t) t'_s}$, *причем* $\varphi^i(t)$ ($i = 1, 2, \ldots, n$)*—полная система линейно-независимых решений уравнения* (2). (Черта над функцией — знак комплексно сопряженной величины.)

Так как $t'_s \neq 0$, то система функций $\psi^i(t)$ также линейно-независима. Для доказательства леммы достаточно показать, чтодля любого $\varphi(t) \in H$ можно подобрать постоянные $C_1, C_2, \ldots, C_n$ так, чтобы уравнение

$$K'\psi=\varphi-(C_1\psi^1+C_2\psi^2+\ldots+C_n\psi^n) \qquad (7)$$

имело решение.

Условия разрешимости уравнения (7) можно преобразовать к виду

$$\sum_{j=1}^{n} C_j(\psi^j, \psi^i)=(\varphi, \psi^i), \ i=1, 2, \ldots, n, \qquad (8)$$

где через $(.,.)$ обозначено скалярное произведение. Определитель системы (8) есть известный определитель Грама и отличен от нуля. Поэтому система (8) относительно коэффициентов $C_1, C_2, \ldots, C_n$ имеет решение. Лемма доказана.

Перейдем теперь к нахождению частного решения неоднородного уравнения

$$K\varphi=f. \qquad (9)$$

По лемме 1 решение $\varphi(t)$ уравнения (9) можно отыскивать в виде (6). Подставляя $\varphi(t)$ из (6) в (9), для определения $\psi(t)$ и постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_n$ получим уравнение

$$KK'\psi=f-\sum_{i=1}^{n} C_i K\psi^i, \qquad (10)$$

которое есть уравнение Фредгольма относительно $\psi(t)$ при заданных $(C_1, C_2, \ldots, C_n)$. Уравнение (10) имеет решение относительно $\psi(t)$ тогда и только тогда, когда выполняются условия

$$\int_L \left[f(t)-\sum_{i=1}^{n} C_i h^i(t)\right]\omega^j(t)dt=0, \ j=1, 2, \ldots, l, \qquad (11)$$

где $h^i(t)=K\psi^i(t)$, а $\omega^1(t), \omega^2(t), \ldots, \omega^l(t)$ — полная система линейно-независимых решений уравнения (3).

Систему (11) можно привести к матричному виду

$$DC=B, \qquad (12)$$

где $C=(C_1, C_2, \ldots, C_n)$ — неизвестный вектор. Если ранг матрицы D равен r, то условия разрешимости системы (12) примут вид

$$\int_L \mu^m(t)f(t)dt=0, \ m=1, 2, \ldots, l-r, \qquad (13)$$

где $\mu^1(t), \mu^2(t), \ldots, \mu^{l-r}(t)$ — вполне определенные линейно-независимые вектор-функции, которые выражаются через функции

$$\omega^1(t), \omega^2(t), \ldots, \omega^l(t) \text{ и } h^1(t), h^2(t), \ldots, h^n(t).$$

Ясно, что условия (13) необходимы и достаточны для разрешимости уравнения (9).

Пусть выполнены эти условия и пусть в уравнении (10) $(C_1, C_2, \ldots, C_n)$ есть частное решение системы (12). Тогда уравнение (10) имеет решение относительно $\psi(t)$ и функция $\varphi(t)$, определенная из (6), является частным решением уравнения (9). Общее решение уравнения (1) равно сумме общего решения однородного уравнения (2) и частного решения уравнения (9).

Следовательно, решение уравнения (1) сводится к решению уравнения Фредгольма и нахождению частного решения системы линейных алгебраических уравнений.

Исходя из вышеизложенных рассуждений приходим к выводу, что изложенный метод регуляризации применим и для других типов операторов K, для которых сопряженный оператор K^* обладает следующими двумя свойствами:

1) операторы K^*K и KK^*—фредгольмовы;

2) операторы K и K^* нормально разрешимы, т. е. для разрешимости уравнений $K\varphi=f$ и $K^*\psi=g$ необходимо и достаточно, чтобы правые части были ортогональны ко всем решениям соответствующих сопряженных однородных уравнений.

В частности этот метод регуляризации можно применить для сингулярных интегральных и псевдодифференциальных уравнений в n-мерном пространстве с отличным от нуля символом.

В заключение выражаю искреннюю благодарность профессору Н. Е. Товмасяну, под руководством которого выполнена настоящая работа.

Кироваканский филиал
Ереванского политехнического института
им. К. Маркса

Վ. Վ. ԱՍԱՏՐՅԱՆ

Սինգուլյար ինտեգրալ հավասարումների համակարգերի ռեգուլյարիզացիայի մի մեթոդի մասին

Սինգուլյար ինտեգրալ հավասարումների նորմալ համակարգերի համար տրվում է ռեգուլյարիզացիայի մի մեթոդ, որը կիրառելի է նաև n-չափանի տարածության մեջ ոչ զրոյական սիմվոլով սինգուլյար ինտեգրալ և փսևդոդիֆերենցիալ հավասարումների համար։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Н. И. Мусхелишвили,* Сингулярные интегральные уравнения. Наука, М., 1968.
[2] *Н. П. Векуа,* Системы сингулярных интегральных уравнений. Наука, М., 1970.