ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXXI 1985 3

УДК 519.1

МАТЕМАТИКА

А. С. Асратян, Н. К. Хачатрян

Исследование гамильтоновости графа с помощью окрестностей вершин

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. Р. Варшамовым 18/X 1984)

В настоящей работе продолжается исследование гамильтоновости графа с помощью количественных характеристик окрестностей вершин, начатое в работе ([1]). Получены обобщения результатов Бонди — Хватала ([2]) и Оре ([3]). Все неопределяемые понятия можно найти в ([4]).

Рассматриваются конечные неориентированные графы без петель и кратных ребер. Множества вершин и ребер графа G обозначаются, соответственно, через $V(G)$ и $E(G)$. Степень вершины x в G обозначается через $d_G(x)$, а расстояние между вершинами x и y в G—через $d_G(x, y)$. Для каждой вершины $x\in V(G)$ введем обозначения: $N_G^{(i)}(x)=\{y\in V(G)|d_G(x, y)=i\}$, $M_G^{(i)}(x)=\{y\in V(G)|d_G(x, y)\leqslant i\}$, $i\geqslant 1$. Подграф, порожденный множеством $M_G^{(i)}(x)$, обозначается через $G^{(i)}(x)$, $i\geqslant 1$. Простую цепь $x_1, x_2, \ldots, x_k$ назовем тупиковой, если $N_G^{(1)}(x_1)\subseteq\{x_2, x_3, \ldots, x_k\}$ и $N_G^{(1)}(x_k)\subseteq\{x_1, \ldots, x_{k-1}\}$. Гамильтоновым циклом графа G называется простой цикл, содержащий все вершины G. Граф, содержащий гамильтонов цикл, называется гамильтоновым графом. Целая часть числа α обозначается через $[\alpha]$.

Лемма 1. *Пусть G—p-вершинный граф, $p\geqslant 3$, и $(x, y)\notin E(G)$. Если $d_G(x)+d_G(y)\geqslant p$, то $d_G(x)+d_{G^{(2)}(x)}(y)\geqslant|M_G^{(2)}(x)|$.*

Лемма 2. *Если в графе G несмежные вершины x и y связаны цепью $x_1=x, x_2, \ldots, x_{k-1}, x_k=y$, $k\geqslant 3$, и выполнены условия: $N_G^{(1)}(x)\subseteq\{x_2, \ldots, x_{k-1}\}$ и $d_G(x)+d_{G^{(2)}(x)}(y)\geqslant|M_G^{(2)}(x)|$, то существует s, $2\leqslant s\leqslant k-2$, такое, что $(x_1, x_{s+1}), (x_s, x_k)\in E(G)$.*

Лемма 3 ([3]). *Если $x_1, x_2, \ldots, x_k$—тупиковая цепь графа G и $d_G(x_1)+d_G(x_k)\geqslant k$, то в подграфе, порожденном вершинами $x_1, \ldots, x_k$, существует гамильтонов цикл.*

Теорема 1. *Связный p-вершинный, $p\geqslant 3$, граф G гамильтонов, если для каждой пары вершин x, y, где $d_G(x)\leqslant\frac{p-1}{2}$ и $d_G(x, y)=2$, выполняется условие $d_G(x)+d_{G^{(2)}(x)}(y)\geqslant|M_G^{(2)}(x)|$.*

Доказательство. Пусть $A=\{C_1, \ldots, C_h\}$—множество всех длиннейших простых цепей графа G, $C_j=\{x_1^{(j)}, \ldots, x_k^{(j)}\}$ и ν_j—наименьшее i из $\{1, 2, \ldots, k\}$, для которого $(x_i^{(j)}, x_k^{(j)})\in E(G)$, $j=1, \ldots, h$.

Разобьем множество A на подмножества A_1, A_2, A_3 следующим образом: $A_1=\{C_j\in A/d_G(x_1^{(j)})+d_G(x_k^{(j)})\geqslant k,\ 1\leqslant j\leqslant h\}$, $A_2=\{C_j\in A\setminus A_1/d_G(x_1^{(j)})\geqslant \geqslant\frac{k}{2},\ 1\leqslant j\leqslant h\}$, $A_3=A\setminus(A_1\cup A_2)$. Докажем, что для каждого $C_j\in A$ в подграфе H_j, порожденном вершинами цепи C_j, существует гамильтонов цикл.

Если $\nu_j=1$, то H_j гамильтонов. Пусть $\nu_j>1$. Возможны три случая.

1. $C_j\in A_1$. Тогда гамильтоновость графа H_j следует из леммы 3.

2. $C_j\in A_2$. Пусть $d_G(x_k^{(j)})=t$ и $N_G^{(1)}(x_k^{(j)})=\{x_{i_1}^{(j)},\dots,x_{i_t}^{(j)}\}$, где $i_1<i_2< <\dots<i_t$. Ясно, что $d_G(x_k^{(j)}, x_{i_1-1}^{(j)})=2$ и по условию теоремы $d_G(x_k^{(j)})+ +d_{G^{(2)}_{(x_k^{(j)})}}(x_{i_1-1}^{(j)})\geqslant|M_G^{(2)}(x_k^{(j)})|$. Поэтому по лемме 2 существует такое s, $i_1\leqslant s\leqslant k-2$, что $(x_{i_1-1}^{(j)}, x_{s+1}^{(j)})$, $(x_s^{(j)}, x_k^{(j)})\in E(G)$. Но тогда в H_j существует длиннейшая цепь $C_l=(x_1^{(j)}, x_2^{(j)},\dots, x_s^{(j)}, x_k^{(j)}, x_{k-1}^{(j)},\dots, x_{s+1}^{(j)})$, которая удовлетворяет следующим условиям: или $(x_1^{(j)}, x_{s+1}^{(j)})\in E(G)$, или $C_l\in A_1$, или $C_l\in A_2$ и $\nu_l<\nu_j$. В первых двух случаях гамильтоновость H_j очевидна. Если C_l не удовлетворяет первым двум условиям, то $C_l\in A_2$ и $\nu_l\leqslant i_1-1=\nu_j-1$, поскольку $i_1=\nu_j$ и $(x_{i_1-1}^{(j)}, x_{s+1}^{(j)})\in E(G)$. Поскольку $C_l\in A_2$, то к C_l можно применять те же рассуждения, что и к C_j. Ясно, что через конечное число таких шагов в H_j будет построена такая последовательность $C_{l_0}=C_j$, $C_{l_1}=C_l$, ..., C_{l_m} длиннейших цепей графа G, что $\nu_{l_{i+1}}<\nu_{l_i}$, $i=0, 1,\dots, m-1$, и или $C_{l_m}\in A_1$, или концевые вершины цепи C_{l_m} смежны. В обоих случаях H_j гамильтонов.

3. $C_j\in A_3$. Рассуждая так же, как в случае 2, можно построить в H_j такую последовательность $C_{l_0}=C_j$, $C_{l_1}=C_l,\dots, C_{l_m}$ длиннейших цепей графа G, что $\nu_{l_{i+1}}<\nu_{l_i}$, $i=0,\dots, m-1$, и или $C_{l_m}\in A_1\cup A_2$, или концевые вершины цепи C_{l_m} будут смежны. В обоих случаях H_j гамильтонов.

Итак, мы доказали, что для каждого $C_j\in A$ подграф H_j гамильтонов. Но тогда $H_j=G$. (В противном случае в G можно построить более длинную простую цепь, чем C_j). Теорема 1 доказана.

Из теоремы 1 и леммы 1 вытекает

Следствие 1. *p-вершинный, $p\geqslant3$, граф G гамильтонов, если для каждой пары вершин x, y с $d_G(x, y)=2$ выполняется условие $d_G(x)+d_G(y)\geqslant p$.*

Следствие 1 является обобщением теоремы Оре ([3]), так как из условия $(x, y)\notin E(G)$ и $d_G(x)+d_G(y)\geqslant|V(G)|$ следует $d_G(x, y)=2$ и для каждого $p\geqslant6$ существует p-вершинный граф, удовлетворяющий условиям следствия 1 и не удовлетворяющий условиям теоремы Оре ([3]).

Другим обобщением теоремы Оре является

Теорема 2. *Связный граф G, $|V(G)|\geqslant3$, гамильтонов, если для любой вершины $x\in V(G)$ и любых несмежных вершин u, $v\in \in N_G^{(1)}(x)$ выполняется одно из следующих условий:*

а) $d_{G^{(1)}(x)}(u)+d_{G^{(1)}(x)}(v)\geqslant|M_G^{(1)}(x)|$,

б) $d_G(u)+d_G(v)\geqslant|M_G^{(2)}(x)|$.

Следствие 2. *Связный граф G, $|V(G)|\geqslant3$, гамильтонов, если для любой вершины $x\in V(G)$ и любой вершины $u\in N_G^{(1)}(x)$ выполняется одно из следующих условий:*

а) $d_{G^{(1)}(x)}(u)\geqslant\dfrac{|M_G^{(1)}(x)|}{2}$,

б) $d_G(u)\geqslant\dfrac{|M_G^{(2)}(x)|}{2}$.

Граф G назовем гамильтоново-устойчивым к добавлению ребра $(x, y)\notin E(G)$, если граф $G+\{(x, y)\}$ гамильтонов тогда и только тогда, когда гамильтонов G.

Теорема 3. Если $d_G(x, y)=2$ и $d_G(x)+d_{G^{(2)}(x)}(y)\geqslant|M_G^{(2)}(x)|$, то граф G гамильтоново-устойчив к добавлению ребра (x, y).

Граф H назовем локальным замыканием графа G (относительно операции добавления ребра), если

1) $V(H)=V(G)$, $E(G)\subseteq E(H)$ и $d_H(x)+d_{H^{(2)}(x)}(y)<|M_H^{(2)}(x)|$ для каждой пары вершин x, y из $V(H)$ с $d_H(x, y)=2$;

2) существует такая последовательность графов $G_1, \ldots, G_k$, $k\geqslant1$, что $G_1=G$, $G_k=H$, $G_{i+1}=G_i+\{(x_i, y_i)\}$, где $d_{G_i}(x_i, y_i)=2$, $d_{G_i}(x_i)+$ $+d_{G_i^{(2)}(x_i)}(y_i)\geqslant|M_{G_i}^{(2)})(x_i)|$, $i=1, \ldots, k-1$.

Локальное замыкание графа G, вообще говоря, не единственно.

Теорема 4. *Пусть H—локальное замыкание графа G. Для того чтобы G был гамильтоновым, необходимо и достаточно, чтобы H также был гамильтоновым.*

Замечание 1. Используя определение локального замыкания и лемму 2, гамильтонов цикл графа H легко можно перестроить в гамильтонов цикл графа G.

Следствие 3. *Если полный граф является локальным замыканием графа G, то G—гамильтонов.*

Следствие 4. *Двусвязный p-вершинный, $p\geqslant3$, граф G гамильтонов, если для любых двух несмежных вершин x, y из $V(G)$ выполняется условие $d_G(x)+d_G(y)\geqslant\delta(G)+1+\left[\dfrac{p-1}{2}\right]$, где $\delta(G)$—минимальная из степеней вершин G.*

В работе ([2]) было введено понятие p-замыкания p-вершинного графа G (обозначается $C_p(G)$) и было доказано, что G гамильтонов тогда и только тогда, когда гамильтонов граф $C_p(G)$.

Утверждение 1. Если H—локальное замыкание p-вершинного графа G, $p\geqslant3$, то $C_p(G)$ является подграфом H.

Утверждение 2. Для каждого $p\geqslant4$ существует p-вершинный граф G с $|E(G)|=2p-3$, для которого K_p является локальным замыканием G.

З а м е ч а н и е 2. В ([5]) показано, что если $C_p(G)=K_p$, то $|E(G)|\geqslant \left[\frac{(p+2)^2}{8}\right]$.

Ереванский государственный университет
Вычислительный центр
Академии наук Армянской ССР
и Ереванского государственного университета

Ա. Ս. ՀԱՍՐԱԹՅԱՆ, Ն. Կ. ԽԱՉԱՏՐՅԱՆ

Գրաֆի համիլտոնության հետազոտումը գագաթների շրջակայքերի օգնությամբ

Դիցուք $G=(V(G), E(G))$-ն վերջավոր գրաֆ է։ x գագաթի աստիճանը G-ում նշանակենք $d_G(x)$-ով, $d_G(x, y)$-ով նշանակենք x և y գագաթների միջև հեռավորությունը G-ում և $G^{(2)}(x)$-ով՝ $M_G^{(2)}(x)$ գագաթների բազմությամբ ծնված G-ի ենթագրաֆը, որտեղ $M_G^{(2)}(x)=\{y\in V(G)/d_G(x, y)\leqslant 2\}$. G գրաֆը կանվանենք համիլտոնյան կայուն (x, y) կողի ավելացման նկատմամբ, եթե $G+\{(x, y)\}$ գրաֆը համիլտոնյան է այն և միայն այն դեպքում, երբ համիլտոնյան է G-ն։

Աշխատանքում ստացված են հետևյալ արդյունքները։

Թ ե ո ր ե մ 1. Կապակցված p-գագաթանի, $p\geqslant 3$, G գրաֆը համիլտոնյան է, եթե յուրաքանչյուր x, y գագաթների զույգի համար, որոնք բավարարում են $d_G(x)\leqslant\frac{p-1}{2}$ և $d_G(x, y)=2$ պայմանին, տեղի ունի $d_G(x)+d_{G^{(2)}(x)}(y)\geqslant|M_G^{(2)}(x)|$ անհավասարությունը։

Հ ե տ և ա ն ք 1. Կապակցված p գագաթանի, $p\geqslant 3$, G գրաֆը համիլտոնյան է, եթե յուրաքանչյուր x, y գագաթների զույգի համար, որոնք բավարարում են $d_G(x, y)=2$ պայմանին, տեղի ունի $d_G(x)+d_G(y)\geqslant p$ անհավասարությունը։

Թ ե ո ր ե մ 3. Եթե $d_G(x, y)=2$ և $d_G(x)+d_{G^{(2)}(x)}(y)\geqslant|M_G^{(2)}(x)|$, ապա G գրաֆը համիլտոնյան կայուն է (x, y) կողի ավելացման նկատմամբ։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *А. С. Асратян, Н. К. Хачатрян,* Мат. заметки, т. 35, № 1 (1984). [2] *J. A. Bondy, V. Chvatal,* Discrete math., v. 15, № 2 (1976). [3] *O. Ore,* Amer. Math. Monthly, v. 67 p. 55 (1960). [4] *Ф. Харари.* Теория графов, Мир, М., 1973. [5] *L. Klark, R. C. Etringer, D. E. Jascon,* Discrete math., v. 30, № 2 (1980).