

УДК 517.5

МАТЕМАТИКА

А. Г. Арутюнян, Н. О. Синанян

О представлении измеримых функций
по полным ортонормированным системам
с заданными коэффициентами

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР А. А. Талаляном 23/V 1983)

В работе ⁽¹⁾ для произвольной последовательности положительных чисел $\{c_k\}$, для которых $\sum c_k^2 = \infty$, была построена ортонормированная система ограниченных функций $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots$ на отрезке $[0, 1]$ такая, что ортогональный ряд $\sum b_k \varphi_k(x)$ при любом порядке членов расходится всюду на $[0, 1]$ к $+\infty$, как только $b_k \geq c_k$. Потом в работе ⁽²⁾ для любой последовательности действительных чисел $\{c_k\}$, $\sum c_k^2 = \infty$, и для одномерного интервала J была построена ортонормированная система $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots$ на J такая, что $\sum c_k \varphi_k(x) = 0$ для всех $x \in J$.

Далее П. Л. Ульяновым поставлена следующая задача.

Для любой последовательности $\{c_k\}$, для которых $\sum c_k^2 = \infty$, и любой функции $F(x)$, определенной и измеримой на отрезке $[0, 1]$, построить такую ортонормированную систему функции $\{\varphi_k(x)\}$ на $[0, 1]$, чтобы ряд $\sum c_k \varphi_k(x)$ сходился всюду на $[0, 1]$ к функции $F(x)$ (функция $F(x)$ может принимать значения $+\infty$ и $-\infty$ на множествах положительной меры) (см. ⁽³⁾).

Эта задача решена в работе ⁽⁴⁾, более того, построена такая система $\{\varphi_k(x)\}$, что ряд $\sum c_k \varphi_k(x)$ сходится всюду на отрезке $[0, 1]$ при любой перестановке его членов к функции $F(x)$.

Цель настоящей работы — дополнить систему функций, построенную в работе ⁽⁴⁾ и удовлетворяющую условию задачи, поставленной П. Л. Ульяновым, до полной ортонормированной.

Отметим, что если ряд $\sum c_k \varphi_k(x)$, где $\{\varphi_k(x)\}$ полная ортонормированная система, сходится на множестве E положительной меры, то коэффициенты c_k удовлетворяют условию $\sum c_k^{-2} = \infty$ (если $c_k = 0$, при некоторых значениях k , то принимаем $c_k^{-1} = 1$), как это показано в работе ⁽⁵⁾.

В настоящей работе утверждается

Теорема 1. Если $\{c_k\}$ произвольная последовательность действительных чисел, удовлетворяющая условиям $\sum c_k^2 = \infty$, $\sum c_k^{-2} = \infty$, и если $F(x)$ произвольная измеримая функция на отрезке $[0, 1]$, то существует полная ортонормированная система $\{\varphi_k(x)\}$ кусочно-постоянных функций на отрезке $[0, 1]$ такая, что ряд $\sum c_k \varphi_k(x)$ сходится почти всюду на отрезке $[0, 1]$ к функции $F(x)$.

Очевидно, не уменьшая общности, можно считать, что все $c_k \neq 0$. Обозначим

$$\|f\| = \left(\int_0^1 |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \|f\|_E = \left(\int_E |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \|f\|_s = \int_0^1 \frac{|f(x)|}{1+|f(x)|} dx.$$

Тогда справедлива следующая

Лемма 1. Пусть заданы произвольное число $0 < \varepsilon < 1$; последовательность $\{c_k\}$ такая, что $\sum c_k^2 = \infty$, $\sum c_k^{-2} = \infty$, $c_k \neq 0$ для всех k ; измеримая почти всюду конечная функция $f(x)$ на отрезке $[0, 1]$; произвольная функция $H \in L_2 [0, 1]$; действительное число β такое, что $\|H\|_{[\beta, 1]} < \varepsilon$.

Тогда для любой ортонормированной системы кусочно-постоянных функций $\varphi_1(x), \dots, \varphi_m(x)$, равных нулю на отрезке $[\beta, 1]$, можно определить систему $\varphi_{m+1}(x), \dots, \varphi_{m+n}(x)$ кусочно-постоянных функций, удовлетворяющих условиям:

1) система $\varphi_1(x), \dots, \varphi_m(x), \varphi_{m+1}(x), \dots, \varphi_{m+n}(x)$ ортонормирована на отрезке $[0, 1]$, $\varphi_i(x) = 0$, $(i = 1, 2, \dots, m+n)$ на некотором отрезке $[\gamma, 1]$, $0 < \beta < \gamma < 1$;

$$2) \quad \left\| f - \sum_{i=1}^n c_{m+i} \varphi_{m+i}(x) \right\|_s < \varepsilon;$$

$$3) \quad \left\| \sup_{1 \leq N \leq n} \left| \sum_{i=1}^N c_{m+i} \varphi_{m+i} \right| \right\|_s < \varepsilon + \|f\|_s;$$

4) существует $G(x) = \sum_{i=1}^{m+n} b_i \varphi_i(x)$ такая, что $\|G - H\| < \varepsilon$.

Дадим схему построения системы функций $\{\varphi_{m+i}(x)\}_{i=1}^n$, удовлетворяющих условиям леммы.

Применяя лемму 2 работы (4), легко построить кусочно-постоянные функции $\varphi_{m+1}(x), \dots, \varphi_{m+k}(x)$ на отрезке $[0, 1]$ и множество $E \subset [0, \beta)$, $mE > (1 - \varepsilon)\beta$, удовлетворяющие условиям:

I) $\varphi_1(x), \dots, \varphi_m(x), \varphi_{m+1}(x), \dots, \varphi_{m+k}(x)$ ортонормирована на $[0, 1]$, $\varphi_i(x) = 0$, $x \in [\beta, 1]$ ($i = 1, 2, \dots, m+k$);

$$II) \quad \left| f(x) - \sum_{i=1}^k c_{m+i} \varphi_{m+i}(x) \right| < \varepsilon, \quad x \in E;$$

$$III) \quad \sup_{1 \leq N \leq k} \left| \sum_{i=1}^N c_{m+i} \varphi_{m+i}(x) \right| \leq |f(x)| + \varepsilon, \quad x \in E.$$

Применим лемму 3 работы (6) к системе $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^{m+k}$. Согласно этой лемме существуют кусочно-постоянные функции $\psi_1^{(1)}(x), \dots, \psi_p^{(1)}(x)$ на $[0, 1]$, обладающие свойствами:

а) функции $\varphi_1(x), \dots, \varphi_{m+k}(x), \psi_1^{(1)}(x), \dots, \psi_p^{(1)}(x)$ ортонормированы на отрезке $[0, 1]$ и $\psi_i^{(1)}(x) = 0$ $x \in [\beta, 1]$ ($i = 1, 2, \dots, p$);

б) существует $B(x) = \sum_{i=1}^{m+k} b_i \varphi_i(x) + \sum_{i=1}^p b_i^{(1)} \psi_i^{(1)}(x)$, такая, что $\|B -$

$$- H\|_{[\beta, 1]} < \varepsilon.$$

Поскольку $\sum c_i^{-1} = \infty$, то можно взять четные натуральные числа $a_1, a_2, \dots, a_p$ со свойствами:

$$a_j < a_{j+1}; \quad a_j - a_{j-1} < a_{j+1} - a_j, \quad (a_0 = 0) \quad (j = 1, 2, \dots, p-1);$$

$$|\omega_j \psi_j^{(1)}(x)| < \varepsilon, \quad x \in [0, \beta) \quad (j = 1, 2, \dots, p),$$

где

$$\omega_j = \left(\sum_{m+k+a_{j-1}+1}^{m+k+a_j} c_i^{-1} \right)^{-\frac{1}{2}} \quad (j = 1, 2, \dots, p).$$

Далее воспользуемся матрицами $A_j = \|a_{r,q}^{(j)}\|$, введенными А. М. Олевским (см. (5)) порядка $a_j - a_{j-1}$ ($j = 1, 2, \dots, p$), полагая $a_{r,1}^{(j)} = (-1)^r \omega_j c_{m+k+a_{j-1}+r}^{-1}$, $1 \leq r \leq a_j - a_{j-1}$ ($j = 1, 2, \dots, p$).

Остальные столбцы выбираем произвольно, требуя лишь выполнения условий ортогональности матрицы A_j .

Пусть $\beta = h_1 < h_2 < \dots < 1$, $\lim_{q \rightarrow \infty} h_q = 1$. Дадим на сегменте $[h_{q-1}, h_q)$ произвольную ортонормированную систему $\{\psi_i^{(q)}(x)\}_{i=1}^{p-1}$, $1 < q \leq a_1$ ($j = 0$), $a_j - a_{j-1} < q \leq a_{j+1} - a_j$, $j = 1, \dots, p-1$ кусочно-постоянных функций, а на $[0, h_1)$ возьмем функции $\psi_1^{(1)}(x), \dots, \psi_p^{(1)}(x)$ и применим матрицы A_j к этой системе так, как это делается в лемме 1 работы (5). Вследствие этого получим функции $\varphi_{m+k+1}(x), \dots, \varphi_{m+k+a_p}(x)$.

Положим $G(x) = \sum_1^{m+k+a_p} b_i \varphi_i(x)$, где $b_{m+k+1}, \dots, b_{m+k+a_p}$ определяется однозначно из системы уравнений

$$\sum_{r=1}^{a_j - a_{j-1}} b_{m+k+a_{j-1}+r} \cdot a_{r,q}^{(j)} = b_j^{(1)}, \quad q = 1, 2, \dots, a_j - a_{j-1}, \quad j = 1, 2, \dots, p.$$

Если обозначим $k + a_p = n$, $\gamma = h_{a_p - a_{p-1}}$, то система $\{\varphi_{m+i}(x)\}_{i=1}^n$ и $G(x)$ удовлетворяет всем требованиям леммы.

Коротко опишем, как из леммы 1 следует утверждение теоремы 1.

Пусть $\{g_i(x)\}_1^\infty$ всюду плотное множество в $L_2[0, 1]$ и последовательность положительных чисел $1 > \varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \dots$ такая, что $\sum \varepsilon_i < \infty$.

Возьмем число $1 - \frac{1}{2} < \beta_1 < 1$ такое, чтобы $\|g_1\|_{[\beta_1, 1]} < \varepsilon_1$.

Введем следующие обозначения:

$$E_1 \equiv E(F(x) = +\infty), \quad E_2 \equiv E(F(x) = -\infty), \quad E_3 \equiv [0, 1] \setminus (E_1 \cup E_2),$$

$$F_1(x) = \begin{cases} F(x) & x \in E_3 \\ 1 & x \in E_1 \\ -1 & x \in E_2 \end{cases}.$$

Применяя лемму 1 для $m = 0$, $\varepsilon = \varepsilon_1$, $H(x) = g_1(x)$, $f(x) = F_1(x)$, $\beta = \beta_1$, получаем кусочно-постоянные на $[0, 1]$ функции $\varphi_1(x), \dots, \varphi_{n_1}(x)$, удовлетворяющие условиям 1)–4).

Поскольку на число γ в лемме не накладывается никаких ограничений кроме $\beta < \gamma < 1$, то γ можно взять так, чтобы выполнялись неравенства

$$\|g_2\|_{[\gamma, 1]} < \varepsilon_2, \quad 1 - \frac{1}{3} < \gamma < 1.$$

Еще раз применим лемму 1, полагая $\varepsilon = \varepsilon_2$, $m = n_1$, $H(x) = g_2(x)$, $\beta = \beta_2$, $f(x) = F_2(x)$, где $\beta_2 = \gamma$ и

$$F_2(x) = \begin{cases} F_1(x) - \sum_{i=1}^{n_1} c_i \varphi_i(x) & x \in E_3 \\ 1 & x \in E_1 \\ -1 & x \in E_2 \end{cases}$$

Нетрудно проверить, что система $\{\varphi_k(x)\}$, порожденная из бесконечного продолжения этого процесса, удовлетворяет всем требованиям теоремы 1.

Следствие. Если возьмем $c_i = 1$ для всех i , то из теоремы 1 следует, что для любой измеримой на отрезке $[0, 1]$ функции $F(x)$ существует полная ортонормированная система $\{\varphi_k(x)\}$ кусочно-постоянных функций на отрезке $[0, 1]$ такая, что ряд $\sum \varphi_k(x) = F(x)$ почти всюду на отрезке $[0, 1]$.

В заключение авторы выражают благодарность Ф. Г. Арутюняну за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

Ереванский государственный университет

Ա. Գ. ՀԱՐՈՒԹՅՈՒՆՅԱՆ, Ն. Հ. ՍԻՆԱՆՅԱՆ

Տրված գործակիցներով ըստ լրիվ օրթոնորմավորված համակարգերի
չափելի ֆունկցիաների ներկայացման մասին

Հոդվածում $\sum c_k^2 = \infty$, $\sum c_k^{-2} = \infty$ հատկութիւններով օժտված իրական
թվերի ցանկացած $c_1, c_2, \dots$ հաջորդականութիւն և $[0, 1]$ հատվածի վրա
որոշված ցանկացած $F(x)$ չափելի ֆունկցիայի համար, կառուցված է $[0, 1]$
հատվածի վրա կտոր առ կտոր հաստատուն ֆունկցիաների լրիվ օրթոնորմա-
վորված սիստեմ, այնպես, որ $\sum c_k \varphi_k(x) = F(x)$ համարյա մեծնորեք $[0, 1]$
հատվածի վրա:

ЛИТЕРАТУРА — ԴՐՈՒՄՆԵՐՆԵՐ

- ¹ П. Л. Ульянов, Науч. докл. высшей школы. Физ-мат. науки, № 4 (1958). ² R. P. Agnew, Duke Math. J., 27, № 2 (1960). ³ П. Л. Ульянов, Тр. IV Всесоюзного мат. съезда, т. 2, Наука, Л., 1964. ⁴ Р. И. Осипов, Мат. сб., т. 68(110), № 4 (1965). ⁵ А. М. Олевский, Мат. сб., т. 58(100), № 2 (1962). ⁶ А. А. Талалян, Изв. АН АрмССР, Математика, т. 10, № 3 (1975).