

УДК 530.145

ФИЗИКА

Н. С. Ананикян, Г. Л. Балаян

Суммирование диаграмм с помощью преобразования Лежандра по скалярному параметру. Высшие порядки

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР С. Г. Матиняном 20/VII 1982)

Стандартная теория возмущений по малой константе связи (λ) в применении к задаче ангармонического осциллятора дает хорошие результаты только при $\lambda \leq 0,01$. С увеличением константы связи при переходе от низкого порядка к более высокому точность ухудшается, что связано с асимптотичностью ряда теории возмущений. Более того, кривые энергии $\epsilon(\lambda)$ как функции константы связи уже при $\lambda \sim 0,1$ начинают осциллировать, т. е. они находятся то выше, то ниже точной кривой, так как ряд теории возмущений является знакопеременным.

В настоящей работе рассматривается метод пересуммирования ряда ⁽¹⁾, позволяющий избавиться от осцилляций и получить хорошее согласие с точными данными ⁽²⁾ в широкой области значений λ .

Метод основан на преобразовании Лежандра по скалярному параметру.

1. Преобразование Лежандра по скалярному параметру рассмотрено в работе ⁽³⁾, где была выведена полная система уравнений для эффективного потенциала $\Gamma(\varphi, G, H, s)$, зависящего от одно φ -, двух G -, трех H -точечных функций Грина и от скалярной величины $s = \langle s_{\text{кл}}(\varphi) \rangle$ (вакуумного среднего классического действия).

Потенциал $\Gamma(\varphi, G, H, s)$ можно представить в виде $\Gamma = s + F(s, G, H)$ (3), где

$$\bar{s} = s - s(\varphi) - \frac{i\hbar}{2} D^{-1}G - \frac{g\hbar}{4} G\varphi^2 - \frac{g\hbar^2}{8} G^2 - \frac{g\hbar^2}{3!} H\varphi. \quad (1.1)$$

В (1.1) $s(\varphi)$ — функционал действия теории (для $g\varphi^4$ -теории он имеет вид $s(\varphi) = \frac{1}{2} iD^{-1}\varphi\varphi + \frac{1}{4!} g\varphi^4$, а $iD_{xy}^{-1} = -(\square_x + m^2)\delta(x-y)$ — „голый“ пропагатор).

Функционал F можно строить итерациями по G^{-1} . Для этого необходимо вывести уравнение типа $F_G = \dots$ ⁽⁴⁾, где в правой части стоят функциональные производные по G более высокого порядка. Такое уравнение для $F(s, G, H)$ было выведено в ⁽³⁾. Поэтому F можно построить в произвольном порядке по G^{-1} . В настоящей работе функционал F построен до девятого порядка по G^{-1} включи-

тельно. Ввиду громоздкости явный вид не выписан. Приведем, однако, выражение для величины, которая понадобится в дальнейшем.

$$\text{tr}\{G_{xy} Q^{-1}(xxx|yyy)\} = \frac{6!}{\hbar^2} \Theta(1+x+Ax^2+Bx^3),$$

где Q^{-1} — оператор, обратный к $Q_{nn} = \frac{F_{\bar{3}n} F_{3n}}{F_{\bar{3}\bar{3}}} - F_{nn}$;

$$\begin{aligned} x &= \frac{36}{g\hbar^2} \text{diagram}_1 \tilde{S}; & A &= -1 + \frac{1}{3} \text{diagram}_2 [\text{diagram}_3 + \text{diagram}_4]; \\ B &= 2 - \text{diagram}_5 [\text{diagram}_3 + 4 \text{diagram}_4] + \frac{1}{27} \text{diagram}_6 [3 \text{diagram}_7 + \\ &+ 8 \text{diagram}_8 + 30 \text{diagram}_9 + 60 \text{diagram}_{10}] \end{aligned} \quad (1.2)$$

каждой линии в диаграммах соответствует G . Отметим также, что в (1.2) $\varphi = H = 0$.

Введение дополнительного скалярного параметра s позволяет вывести уравнение вида ⁽³⁾

$$F_{\bar{s}} = -\frac{1}{\hbar} \left(\frac{4!}{g\hbar^2} \right)^2 \frac{\bar{s}}{4 \text{tr}\{GQ^{-1}\}}. \quad (1.3)$$

В терминах переменной x оно имеет вид

$$F = -\frac{1}{g\hbar} \frac{\text{diagram}_{11}^4}{\text{diagram}_{12}^2} \int \frac{x dx}{\text{tr}\{GQ^{-1}\}} \quad (1.4)$$

Интеграл (1.4) позволяет провести дополнительное пересуммирование, для чего необходимо вычислить $\text{tr}\{GQ^{-1}\}$ (1.2). В ⁽¹⁾ $\text{tr}\{GQ^{-1}\}$ был вычислен в низших порядках.

Такое суммирование может быть полезным в теории поля и задачах статистической физики. Преимущества такого метода суммирования хорошо видны на примере ангармонического осциллятора.

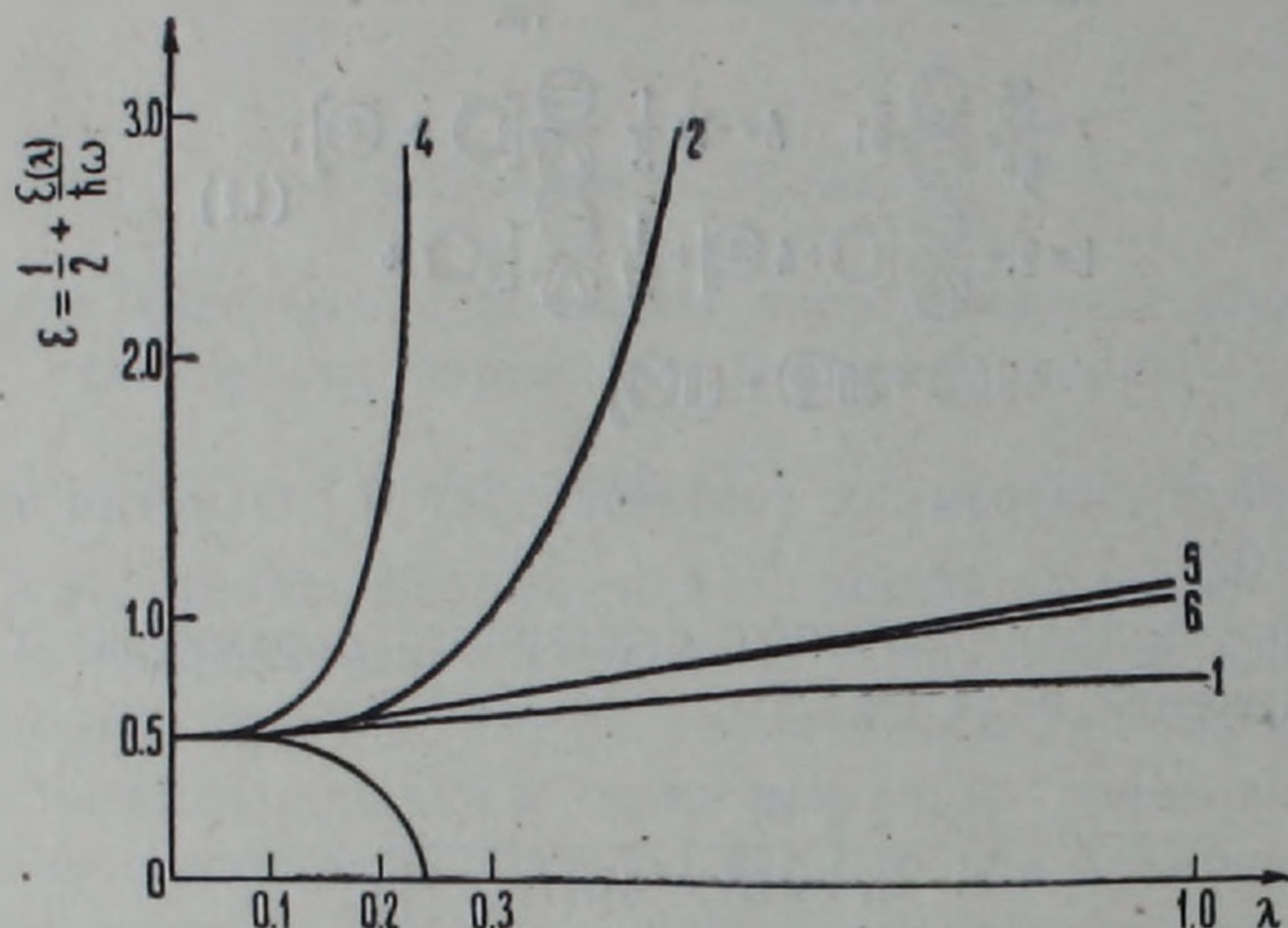
2. В случае ангармонического осциллятора $\left(L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{m\omega^2 x^2}{2} + g \frac{x^4}{4!} \right)$, являющемся одномерным аналогом $g\varphi^4$ -теории, можно вычислить все диаграммы, входящие в (1.4) в приближении $G=D$. Разность энергий основного состояния полной ($g \neq 0$) и свободной ($g=0$) теорий определяются формулой ⁽⁴⁾

$$-\bar{\epsilon}(g) \int dt = \Gamma/s - \bar{s}_{vac} - \frac{i\hbar}{2} \text{tr} 1 - \frac{\hbar}{2i} \text{tr} \ln G, \quad (2.1)$$

где $\bar{s}_{vac}$ решение уравнения стационарности $\Gamma_{\bar{s}}=0$.

Подставляя в (2.1) выражение для F (1.4), получим энергию основного состояния $\bar{\epsilon}^{(5)}(\lambda)$ ангармонического осциллятора как функцию безразмерной константы взаимодействия $\lambda = -\frac{g\hbar}{4!m^2\omega^2}$ (индекс ⁽⁵⁾ означает, что суммируются диаграммы не выше пятого порядка по λ).

Вид функции $\tilde{\epsilon}^{(5)}(\lambda)$ показан на рисунке (кривая 6). Кривая 5 соответствует случаю, когда суммируются диаграммы не выше третьего порядка по λ ⁽¹⁾, что означает $A=B=0$. Кривые 2, 3, 4 соответствуют $\epsilon^{(3)}(\lambda)$, $\epsilon^{(4)}(\lambda)$, $\epsilon^{(5)}(\lambda)$ в стандартной теории возмущений по



малой константе. Кривая 1 является точной ⁽²⁾. Функция $\tilde{\epsilon}^{(4)}(\lambda)$ ($A \neq 0$; $B=0$) была изучена в ⁽¹⁾, отметим, что она лежит между кривыми 5 и 6.

Численные значения энергий основного состояния, вычисленные в различных приближениях, приведены в таблице.

$\epsilon(\lambda)$	λ					
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,6	1
$\epsilon_{\text{точное}}$	0,5591	0,6024	0,6380	0,6688	0,7210	0,8038
$\epsilon^{(3)} \text{ Т. В.}$	0,5696	0,7115	1,0507	1,712	4,5005	19,4375
$\tilde{\epsilon}^{(3)}$	0,5724	0,6418	0,7099	0,7771	0,9100	1,1726
$\epsilon^{(5)} \text{ Т. В.}$	0,5812	1,4504	7,7980	32,2042	251,6865	3359,1289
$\tilde{\epsilon}^{(5)}$	0,5692	0,6363	0,7019	0,7672	0,8972	1,1569

Анализ метода суммирования диаграмм, описанный в данной работе, позволяет сделать следующие выводы (см. рисунок и таблицу):

- в отличие от стандартной теории возмущений исчезла осциллирующая кривая при переходе от низших к высшим порядкам;
- значительно расширилась по λ область применения, по крайней мере, для энергий основного состояния;
- наблюдается монотонное увеличение точности с ростом порядка приближения.

В заключение авторы благодарят С. Г. Матиняна, Г. К. Саввиди и О. Н. Худавердяна за полезные и стимулирующие обсуждения.

Ереванский физический институт
Государственного комитета по использованию
атомной энергии СССР

Ն. Ս. ԱՆԱՆԻԿՅԱՆ, Դ. Լ. ԲԱԼԱՅԱՆ

Դիագրամների գումարումը Լեժանդրի ձևափոխության միջոցով՝
ըստ սկալյար պարամետրի: Բարձր կարգեր

Արված է Լեժանդրի ձևափոխությունը ըստ $s = \langle 0 | s_T | 0 \rangle$ սկալյար պարամետրի, որը հանդիսանում է դասական գործողության վակուումային միջինը: Օգտագործելով այդ պարամետրից կախված էֆեկտիվ պոտենցիալի հավասարումը կատարված է վակուումային դիագրամների գումարում: Աշխատանքում առաջարկված դիագրամների գումարման մեթոդը կարելի է օգտագործել վիճակագրական ֆիզիկայում և դաշտի քվանտային տեսությունում: Կիրառելով այն միաշափ ոչհարմոնիկ օսցիլյատորի խնդրին, ի տարբերություն ստանդարտ խոտորումների տեսության, ըստ կապի փոքր հաստատունի ավելի բարձր կարգերի անցնելիս

- ա) վերանում են էներգիայի որպես ֆունկցիա կապի հաստատունից կորերի օսցիլյացիաները
- բ) դիտվում է ճշտության մոնոտոն լավացում
- գ) զգալի մեծանում է ըստ λ -ի կիրառման ոլորտը հիմնական վիճակի էներգիան հաշվելու համար:

ЛИТЕРАТУРА — ԴՐԱՇԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ Н. С. Ананикян, Г. Л. Балаян, Г. К. Саввиди. Препринт ЕФИ-574 (61)—82.
² F. Hioe, D. Macmillen, E. Montrell, Phys. Rep., v. 3С (7), 305—335 (1978). ³ Н. С. Ананикян, Г. К. Саввиди, ТМФ, т. 49, № 1, (1981) ⁴ А. Н. Васильев, Функциональные методы в квантовой теории поля и статистике, Изд-во ЛГУ, 1976.