ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXV 1982 3

УДК 511.5

МАТЕМАТИКА

Член-корреспондент АН Армянской ССР Р. Р. Варшамов

# Об одном общем результате первого случая Последней теоремы Ферма

(Представлено 26/II 1982)

Последняя теорема Ферма — это утверждение, что не существует тройки целых положительных чисел $x$, $y$, $z$, удовлетворяющих равенству

$$x^n+y^n=z^n,$$

где $n>2$.

Несмотря на усилия многих математиков, доказать полностью эту теорему пока никому не удалось. Имеются доказательства этого утверждения лишь для некоторых ее частных случаев ([1]).

Однако еще со времени Эйлера было замечено, что для тех значений $n$, для которых найдено доказательство теоремы Ферма, оно обычно разбивается на два случая: первый, когда ни одно из чисел $x$, $y$, $z$ не делится на $n$, и второй, когда хотя бы одно из чисел $x$, $y$, $z$ делится на $n$.

В отличие от общего случая Последней теоремы Ферма ее первый случай допускает для ряда частных значений $n$ элементарное доказательство. Первый результат в этом направлении получен в конце XIX в. и принадлежит Софи Жермен. В частности, она показала, что для простого числа $n$ справедлив первый случай теоремы Ферма, если число $2n+1$ также является простым. Лежандр несколько расширил этот результат, показав, что первый случай теоремы Ферма имеет место для простого показателя $n$, если хотя бы одно из чисел $2mn+1$, где $m=2, 4, 5, 7, 8$, является простым.

После Лежандра не было найдено никаких других элементарных и более общих подходов к решению первого случая Последней теоремы Ферма ([2]). И таким образом, остался открытым вопрос—конечно или бесконечно число значений $n$, для которых первый случай теоремы Ферма имеет место.

Что же касается неэлементарных методов, то впервые для доказательства первого случая Последней теоремы Ферма их привлек Куммер. Эти методы тесно связаны с проблемой однозначности разложения целых чисел на простые множители в полях алгебраических чисел ([3]). С их помощью была установлена справедливость первого случая Последней теоремы Ферма для всех $n<253\,747\,889$.

В данной статье устанавливается справедливость первого случая Последней теоремы Ферма для бесконечного множества показателей $n$ методами элементарной арифметики.

Лемма 1. *Пусть $a$—натуральное число, $m>1$—любое свободное от квадратов нечетное число, простые делители которого $p$ удовлетворяют условию $2^{a+2} \mid p-1$. Тогда уравнение*

$$x^m+y^m=z^{2^a},$$

*где $x$ и $y$ нечетные взаимно простые числа, не будет иметь решения в целых числах, если $z$ не делится на $m$.*

Лемма 2. *Для любого нечетного простого числа $m$, удовлетворяющего условию $8 \mid m-1$, уравнение*

$$x^m+y^m=2z^m$$

*не имеет примитивной тройки решения, если одно из чисел $x$, $y$ или $z$ делится на $m$ и не делится на $2m$.*

*Как прямое следствие лемм 1 и 2 вытекают следующие два факта:*

Теорема 1. *Для любого свободного от квадратов четного числа $n$, простые нечетные делители которого $p$ удовлетворяют условию $16 \mid p-1$, уравнение*

$$x^n+y^n=z^n$$

*не имеет целых решений, не делящихся на $n$.*

Теорема 2. *Пусть $n=2p$, где $p$—простое нечетное число, такое, что $p-1$ или $p-49$ не делится на 240. Тогда уравнение*

$$x^n+y^n=z^n$$

*не будет иметь решений в целых числах, не делящихся на $n$.*

Определим функцию $\sigma_{p,q}(x)$ следующим образом:

$$\sigma_{p,q}(x)=\begin{cases} 0, & \text{если } 2qp \mid \prod\limits_{u=1}^{p-1}(x-u^q), \\ 1, & \text{если } 2qp \nmid \prod\limits_{u=1}^{p-1}(x-u^q), \end{cases}$$

где $q$ и $p$ простые числа, связанные соотношением $q \mid p(p-1)$.

Утверждение 1. Существует бесконечное множество простых чисел, удовлетворяющих уравнению $\sigma_{p,q}(x)-1=0$.

Теорема 3. *Пусть*

$$\prod_{v=1}^{p-1}\sigma_{p,q}(1+v^q)\sigma_{p,q}\left(\left[\frac{p}{q}\right]+v^q\right)=1,$$

*где $[x]$—наибольшее целое, не превосходящее $x$.*

*Тогда для любого свободного от квадратов и кратного $q$ положительного числа $n$, все простые делители которого $\theta$ удовлетворяют условию $\sigma_{p,q}(\theta)=1$, уравнение $x^n+y^n=z^n$ не будет иметь решений в целых числах, не делящихся на $pn$.*

Теорема 4. *Пусть* $\pi(x)=\prod\limits_{v=2}^{\left[\frac{x+1}{2}\right]}\sum\limits_{u=1}^{x-1}\frac{v^u}{u}$ $(\pi(2)=1)$. *И пусть, кроме того, дано свободное от квадратов целое число $n$, у которого хотя бы один простой делитель $q$ удовлетворяет условию*

$$\pi(q)\prod_{\theta \mid n/q}\sigma_{p,q}(\theta)\not\equiv 0 \pmod q,$$

*где $\theta$ пробегает все простые делители $n/q$.*

*Тогда уравнение*

$$x^n+y^n=z^n$$

*не будет иметь решений в целых числах, не делящихся на $n$.*

Пусть $p\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ означает множество всех простых чисел вида $p_l=pN+a_l$, где $N$—целое число, $a_l\in\{a_k\}$ $(1\leqslant l\leqslant k)$.

Теорема 5. *Пусть $p$ и $q$ два простых числа, удовлетворяющих условию $\frac{p-1}{q}=4m$, где $m=1$ или 2, $q>2m+1$ и $q\neq(m-1)29$.*

*Тогда для любого свободного от квадратов и кратного $q$ целого числа $n$, все отличные от $q$ простые делители $\theta$ которого удовлетворяют соотношению*

$$\theta\notin p\{\pm 1,\ \pm(2qm)^{\frac{1}{m}}\pm\ldots\pm(2mq)^{\frac{2m-1}{m}}\},$$

*уравнение*

$$x^n+y^n=z^n$$

*не будет иметь решений в целых числах, не делящихся на $n$.*

Теорема 6. *Пусть даны простое число $p$ и свободное от квадратов натуральное число $n$, делящееся на два различных простых числа $q_1$ и $q_2$, удовлетворяющих условию $q_1q_2|p(p-1)|$ и*

$$\sigma_{p,q_1}(q_2)\sigma_{p,q_2}(q_1)(\sigma_{p,q_1}(\theta)+\sigma_{p,q_2}(\theta))\prod_{v=1}^{p-1}\sigma_{p,q_1}(1+v^{q_1})\sigma_{p,q_2}(1+v^{q_2})\geqslant 1,$$

*где $\theta$ любой простой делитель $(q_1q_2)^{-1}n$. Тогда уравнение*

$$x^n+y^n=z^n$$

*не будет иметь решения в целых числах, не делящихся на $n_1$*

$$n_1=\begin{cases} n, \text{ если } p|q_1q_2 \\ pn, \text{ если } p\nmid q_1q_2. \end{cases}$$

Очевидно множество значений $n$, удовлетворяющих условию теорем 3, 4, 5 и 6, согласно утверждению 1 счетное множество.

Данная работа обсуждалась на семинаре Вычислительного центра АН АрмССР.

Вычислительный центр Академии наук Армянской ССР

Հայկական ՍՍՀ ԳԱ թղթակից-անդամ Ռ. Ռ. ՎԱՐՇԱՄՈՎ

## Ֆերմայի վերջին թեորեմի առաջին դեպքի մի ընդհանուր արդյունքի մասին

*Ներկա աշխատանքում բերվում է Ֆերմայի վերջին թեորեմի առաջին դեպքի մի էլեմենտար ապացույց՝ անվերջ թվով աստիճանների համար։*

## ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Г. Эдвардс*, Последняя теорема Ферма. Генетическое введение в алгебраическую теорию чисел. Мир, М., 1980. [2] *М. М. Постников*, Теорема Ферма, Наука, М. 1978 [3] *З. И. Боревич, И. Р. Шафаревич*, Теория чисел, Наука, М., 1972.