ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXV 1982 2

УДК 539.376

ТЕОРИЯ ПОЛЗУЧЕСТИ

Ф. М. Поладян

Нелинейная ползучесть составного сектора кругового кольца при кручении

(Представлено академиком АН Армянской ССР Н. Х. Арутюняном 4/II 1982)

Рассматривается задача о кручении составного сектора кругового кольца (кривой стержень), поперечное сечение которого состоит из N различных областей, материалы которых обладают свойством нелинейной наследственной ползучести ([1]), с различными мерами ползучести и модуля мгновенного сдвига.

Пусть рассматриваемый сектор кругового кольца с постоянным поперечным сечением находится под воздействием перерезывающих сил P и крутящих моментов PR (R—радиус оси сектора кольца), приложенных на торцевых сечениях (рис. 1).

Задачи кручения однородных кривых стержней исследованы в ([2–6]). Пластическое кручение кривого стержня, составленного из различных материалов, исследовано в ([7]).

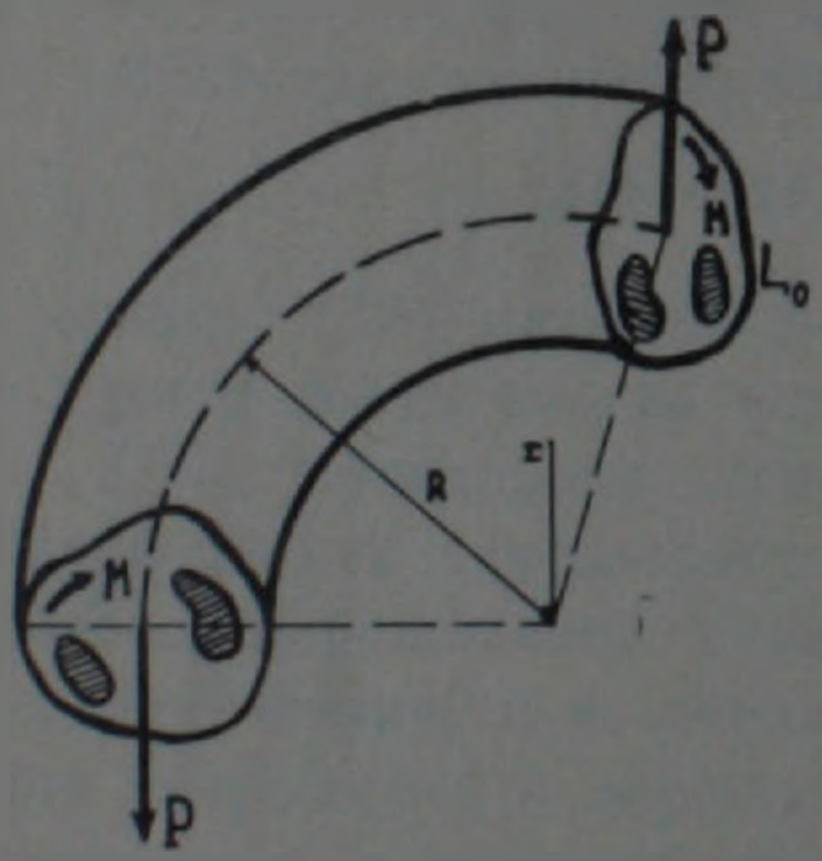

Рис. 1. Составной сектор кругового кольца, находящийся под воздействием перерезывающих сил P и крутящих моментов $M=PR$, приложенных на торцевых сечениях

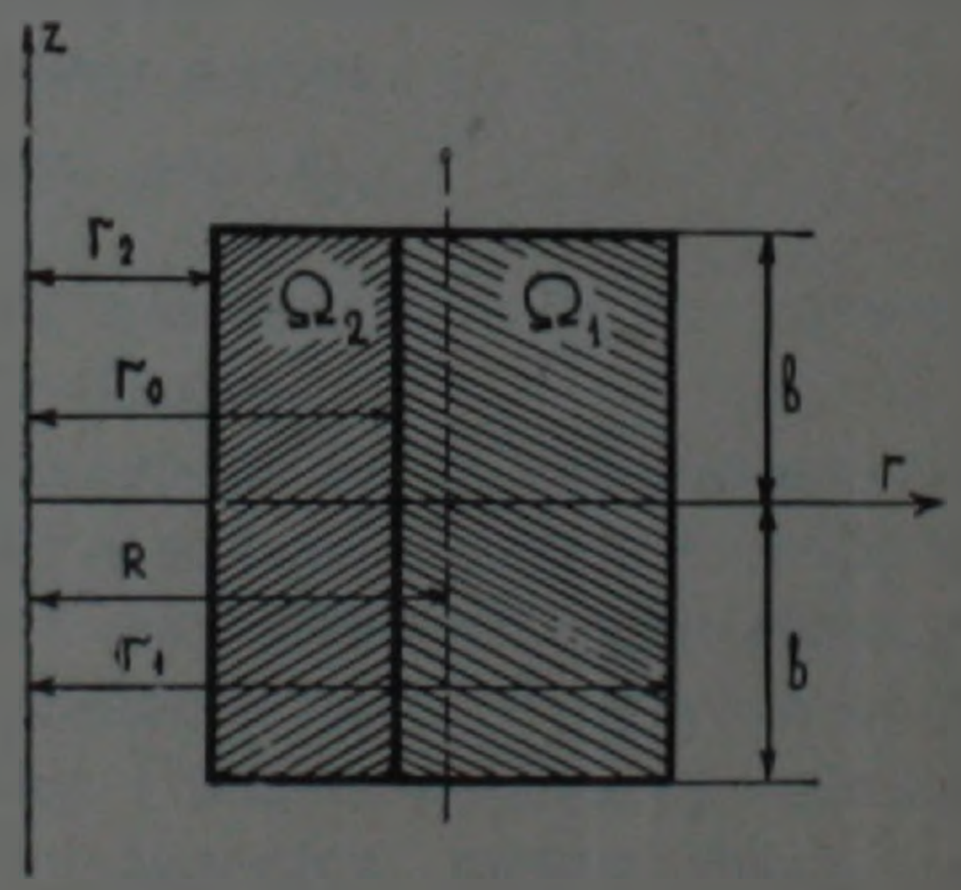

Рис. 2. Поперечное сечение скручиваемого составного сектора кругового кольца

1. Принимаем, что в области Ω_m между компонентами деформаций ползучести и напряжениями имеют место соотношения Н. Х. Арутюняна ([1]):

$$2G_m\varepsilon_{ij}^{(m)} = s_{ij}^{(m)} - \int_{\tau_1}^{t} s_{ij}^{(m)} f_m[\sigma_0^{(m)}(\tau)]K_m(t, \tau)d\tau \quad (m=\overline{1, N}), \qquad (1.1)$$

где G_m — модуль сдвига, $s_{ij}^{(m)} = \sigma_{ij}^{(m)} - \delta_{ij}\sigma^{(m)}$, δ_{ij} — символ Кронекера, $\sigma^{(m)}$ — среднее давление, $f_m[\sigma_0^{(m)}]$ — функция, характеризующая нелинейную зависимость между напряжениями и деформациями ползучести, $\sigma_0^{(m)}$ — интенсивность тензора напряжений в области Ω_m, $K_m(t, \tau) = 3G_m \dfrac{\partial C_m(t, \tau)}{\partial \tau}$, $C_m(t, \tau)$ — мера ползучести в области Ω_m. В дальнейшем индекс m опускаем и понимаем, что приводимые ниже соотношения имеют место в каждой области Ω_m $(m = 1, 2, \ldots, N)$.

Перемещения в цилиндрических координатах представим в виде (°)

$$u = u_0 + \int \left(2r\varepsilon_{r\theta} + v - r\frac{\partial v}{\partial r} \right) d\theta, \quad v = v_0 + \int \left(r\varepsilon_\theta - u \right) d\theta,$$
$$w = w_0 + \int \left(2r\varepsilon_{\theta z} - r\frac{\partial v}{\partial z} \right) d\theta, \tag{1.2}$$

где u_0, v_0, w_0 — произвольные функции от r, z и t.

Полагая в уравнениях равновесия (°) отличными от нуля только напряжения $\sigma_{r\theta}$, $\sigma_{z\theta}$, получим

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\sigma_{r\theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(r^2\sigma_{z\theta} \right) = 0, \tag{1.3}$$

а из остальных следует, что напряженное состояние сектора кольца не зависит от полярного угла θ, следовательно, тензор деформации также не зависит от θ.

Вычисляя ε_r, ε_z, ε_{rz} и учитывая указанное обстоятельство, будем иметь

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u_0}{\partial r}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w_0}{\partial z}, \quad 2\varepsilon_{rz} = \frac{\partial u_0}{\partial z} + \frac{\partial w_0}{\partial r} \tag{1.4}$$

и

$$2\varepsilon_{r\theta} = \frac{\partial v_0}{\partial r} - \frac{v_0}{r}, \quad 2\varepsilon_{z\theta} = \frac{\partial v_0}{\partial z} - \frac{D(t)}{r}, \tag{1.5}$$

где $D(t)$ — произвольная функция от t и одно и то же для всех областей $\Omega_m (m = 1, 2, \ldots, N)$. Из соотношения (1.5), исключая v_0, получим уравнение совместности деформаций

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\varepsilon_{z\theta}}{r} \right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\varepsilon_{z\theta}}{r} \right) = \frac{D(t)}{r^3}. \tag{1.6}$$

Полагая в (1.4) равными нулю все компоненты деформаций, получим систему относительно u_0, w_0. Решения этой системы уравнений позволяют из (1.2) получить выражения для перемещений u, v, w.

В каждой области Ω_m вводя функцию напряжений $\Phi(r, z, t)$

$$\sigma_{r\theta} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial \Phi}{\partial z}, \quad \sigma_{z\theta} = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial \Phi}{\partial r},$$

при помощи соотношения (1.1), (1.6) получим

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r^3}\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r^3}\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)-\int_{\tau_1}^{t}\left|\frac{\partial}{\partial r}\right|\frac{f(\sigma_0)}{r^3}\frac{\partial\Phi}{\partial r}\Bigg|+$$

$$+\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{f(\sigma_0)}{r^3}\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right]\Bigg|K(t,\tau)d\tau=-\frac{D(t)G}{r^3}, \tag{1.7}$$

где

$$\sigma_0=\sigma_0(t)=\frac{1}{r^2}\sqrt{\left(\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)^2}. \tag{1.8}$$

Аналогично (7,8) можно получить контурные условия на линиях контакта L_{1k}:

$$\Phi=C_0^*(t)\ \text{на}\ L_0,\quad \Phi_1=\Phi_k+C_{1k}^*(t)\ \text{на}\ L_{1k}; \tag{1.9}$$

$$\frac{1}{G_1}\frac{\partial\Phi_1}{\partial n}-3\int_{\tau_1}^{t}\frac{\partial\Phi_1}{\partial n}f_1[\sigma_0^{(1)}]\frac{\partial C_1(t,\tau)}{\partial\tau}d\tau=$$

$$=\frac{1}{G_k}\frac{\partial\Phi_k}{\partial n}-\int_{\tau_1}^{t}\frac{\partial\Phi_k}{\partial n}f_k[\sigma_0^{(k)}]\frac{\partial C_k(t,\tau)}{\partial\tau}d\tau\ \text{на}\ L_{1k}, \tag{1.10}$$

где n—нормаль к L_{1k}.

Крутящий момент определяется аналогичной формулой (5,6).

2. Интегрируя обе части уравнения (1.7) в области Ω_*, целиком лежащей в одном из поперечных сечений скручиваемого сектора кольца и ограниченной замкнутым контуром L_*, и переходя к контурному интегралу, получим уравнение

$$\int_{L_*}\frac{1}{r^3}\left|\frac{\partial\Phi}{\partial n}-\int_{\tau_1}^{t}\frac{\partial\Phi}{\partial n}f(\sigma_0)K(t,\tau)d\tau\right|ds=\frac{D(t)G}{2}\int_{L_*}\frac{dz}{r^2}, \tag{2.1}$$

выражающее теорему о циркуляции сдвига для нашей задачи.

3. Рассмотрим случай, когда поперечное сечение состоит из двух прямоугольных областей (рис. 2). Пусть в области Ω_1 материал обладает свойством нелинейной ползучести, а в области Ω_2 справедлив закон Гука. На основании вышеизложенного функция Φ_1 в области Ω_1 удовлетворяет уравнению (1.7), а функция Φ_2 в области Ω_2 уравнению

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r^3}\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r^3}\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)=-\frac{D(t)G_2}{r^3}. \tag{3.1}$$

Полагая $f_1[\sigma_0^{(1)}]=1+\lambda[\sigma_0^{(1)}]^2$, решение уравнений (1.7) и (3.1) ищем в виде

$$\Phi_i(r,z,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n\Phi_{in}(r,z,t)\quad(i=1,2). \tag{3.2}$$

Подставляя (3.2) в (1.7) и (1.8), приходим к системе рекуррентных дифференциальных уравнений относительно $\Phi_{1n}(r,z,t)$.

Функции $\Phi_{in}(r, z, t)$ ищем в виде

$$\Phi_{in}(r, z, t) = -\sum_{k=1}^{\infty} A_{ik}^{n}(r, t)\cos\mu_k z, \quad \mu_k = \frac{2k-1}{2b}\pi. \tag{3.3}$$

Вводя функции

$$Z_k^n(r, z) = I_n(\mu_k r)K_n(\mu_k z) - I_n(\mu_k z)K_n(\mu_k r),$$

$$Z_k^{sm}(r, z) = I_s(\mu_k r)K_m(\mu_k z) + I_m(\mu_k z)K_s(\mu_k r),$$

где $I_\nu(x)$, $K_\nu(x)$—функции Бесселя, коэффициенты $A_{ik}^n(r, t)$ в (3.3) при условиях (1.9)—(1.10) определяют следующими формулами:

$$A_{1k}^n(r, t) = r^2\left|\frac{Z_k^2(r_2, r_0)}{I_2(\mu_k r_2)}\frac{Z_k^2(r_1, r)}{Z_k^2(r_1, r_0)}b_k^n(t) + \frac{Z_k^2(r_1, r)}{Z_k^2(r_1, r_0)}d_k^n(t) + \right.$$

$$\left. + \int_r^{r_1} \alpha_{nk}^1(\xi, t)\xi Z_k^2(\xi, r)d\xi \right|,$$

$$A_{2k}^n(r, t) = r^2\left[\frac{Z_k^2(r_2, r)}{I_2(\mu_k r_2)}b_k^n(t) + \alpha_{nk}^2(t)\int_{r_2}^{r} \xi Z_k^2(\xi, r)d\xi\right],$$

где

$$b_k^n(t) = \frac{h_k^n(t)}{a_k} + \frac{a_k^*}{a_k^2}\int_{\tau_1}^{t} h_k^n(\tau)K_1(t, \tau)d\tau,$$

$$d_k^n(t) = \alpha_{nk}^2(t)\int_{r_2}^{r_0} \xi Z_k^2(\xi, r_0)d\xi - \int_{r_0}^{r_1} \alpha_{nk}^1(\xi, t)\xi Z_k^2(\xi, r_0)d\xi,$$

$$a_k = \frac{G_1}{G_2}\frac{Z_k^{21}(r_2, r_0)}{I_2(\mu_k r_2)} + a_k^*, \qquad a_k^* = -\frac{Z_k^2(r_2, r_0)}{I_2(\mu_k r_2)}\frac{Z_k^{21}(r_1, r_0)}{Z_k^2(r_1, r_0)},$$

$$\alpha_{nk}^1(r, t) = \frac{2}{b}\int_0^b Q_n(r, z, t)\cos\mu_k z dz, \quad \alpha_{0k}^2(t) = \frac{2(-1)^k G_2 D(t)}{b\mu_k}$$

$$\alpha_{nk}^2(t) = 0 \ (n = 1, 2, \ldots), \quad h_k^n(t) = F_k^n(t) - \int_{\tau_1}^{t} F_k^n(\tau)K_1(t, \tau)d\tau -$$

$$-\frac{G_1}{G_2}\alpha_{nk}^2(t)\int_{r_2}^{r_0} \xi Z_k^{21}(\xi, r_0)d\xi + \frac{P_k^n(r_0, t)}{a_k},$$

$$F_k^n(t) = \frac{Z_k^{21}(r_1, r_0)}{Z_k^2(r_1, r_0)}d_k^n(t) + \int_{r_0}^{r_1} \alpha_{nk}^1(\xi, t)\xi Z_k^2(\xi, r_0)d\xi,$$

$$Q_0(t) = G_1\left[D(t) + \int_{\tau_1}^{t} D(\tau)R_1(t, \tau)d\tau\right], \quad n \geqslant 1 \quad Q_n(r, z, t) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\tau_1}^{t} N_1(t, \tau) | \operatorname{grad}\Phi_{1n} \operatorname{grad}\Phi_{1,n-1-k} - \omega_k Q_{n-1-k} | d\tau,$$

$$N_1(t, \tau) = K_1(t, \tau) + \int_{\tau}^{t} R_1(t, \xi) K_1(\xi, \tau) d\xi, \quad \omega_n =$$

$$= r^{-4} \sum_{k=0}^{n} \operatorname{grad}\Phi_{1k} \operatorname{grad}\Phi_{1,n-k} \quad P_k^0(r, t) = 0, \text{ а при } n \geqslant 1$$

$$P_k^n(r, t) = -\frac{2}{b} \sum_{j=0}^{n-1} \int_0^b \left| \int_{\tau_1}^{t} \omega_j \frac{\partial \Phi_{1,n-1-k}}{\partial r} K_1(t, \tau) d\tau \right| \cos \mu_k z dz,$$

$R_1(t, \tau)$ — резольвента ядра $K_1(t, \tau)$. Для меры ползучести $C_1(t, \tau) = (C_{01} + A_{11}\tau^{-1})[1 - e^{-\gamma_1(t-\tau)}]$ $R_1(t, \tau)$ определяется так, как в ([5,6]).

Аналогично ([5,6]) доказывается существование решения задачи.

4. Рассмотрим сектор кольца, составленный из двух слоев различной толщины с сечением в виде узкого прямоугольника, вытянутый по направлению z. В этом случае напряжения в областях Ω_1, Ω_2 можно представить в виде $\sigma_{z\theta}^{(i)}(r, t, \tau_1) = H^{(i)}(r, t, \tau_1)\sigma_{z\theta}^{(i)}(r, \tau_1)$.

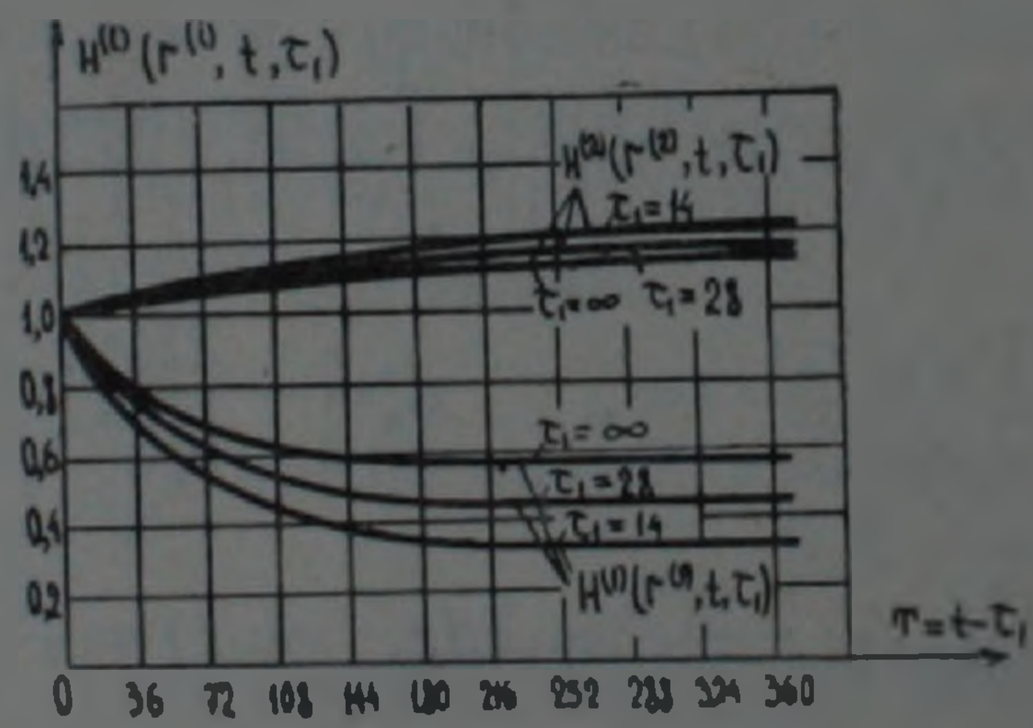

Рис. 3. Зависимость коэффициентов затухания и нарастания касательных напряжений во времени. $\lambda = 0{,}0001$, $M(\tau_1) = 400$ кг · см

На ЭВМ „ЕС—1022“ при значениях параметров $3C_{01} = 2{,}25 \cdot 10^{-5}$, $3A_{11} = 12{,}05 \cdot 10^{-5}$; $\gamma_1 = 0{,}026$; $G_1 = 8 \cdot 10^4$ кг/см^2; $G_2 = 8 \cdot 10^5$ кг/см^2; $R = 4{,}5$ см; $r_{1,2} = R \pm 0{,}5$; $b = 5(r_1 - r_2)$; $r_0 = R - 1/8$ дано решение задачи.

На рис. 3 показана зависимость $H^{(i)}(r^{(i)}, t, \tau_1)$ от τ_1, при $r^{(i)} = 0{,}5(r_0 + r_i)$.

Ереванский политехнический
институт им. К. Маркса

Ֆ. Մ. ՓՈԼԱԴՅԱՆ

Բաղադրյալ շրջանային օղակի սեկտորի ոչ-գծային սողքը ոլորման դեպքում

Ուսումնասիրվում է ժառանգական, տարբեր ոչ-գծային սողքի հատկություններ ունեցող նյութերից կազմված շրջանային օղակի սեկտորի ոլորման խնդիրը։

Օգտվելով գլանային կոորդինատների համակարգից, խնդիրը բերվում է յուրաքանչյուր տիրույթում ոչ-գծային ինտեգրա-դիֆերենցիալ հավասարման ինտեգրմանը, խառը եզրային պայմաններով։

Ուսումնասիրվում է ուղղանկյուն ուղղահայաց հատույթի դեպքը։

Բարակապատ բաղադրյալ շրջանային օղակի սեկտորի դեպքում կառուցված են լարումների բաղադրիչների գրաֆիկներ՝ թվային օրինակների հիման վրա։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Н. Х. Арутюнян.* Некоторые вопросы теории ползучести, ГИТТЛ, М.—Л., 1952. [2] *A. J. Wang, W. Prager.* J. Mech. and Phys. Solids, vol. 3 (1955). [3] *М. А. Задоян,* ДАН СССР, т. 223, №2 (1975). [4] *М. А. Задоян* Изв. АН СССР, МТТ, №1 (1977). [5] *М. А. Задоян, Ф. М. Поладян,* ДАН АрмССР, т. 71. № 3 (1980) [6] *Ф. М. Поладян,* Изв. АН АрмССР, Механика, т. 34, № 2 (1981) [7] *П. В. Галпчян,* Изв. АН АрмССР, Механика, т. 33, № 4 (1980). [8] *Н. Х. Арутюнян, Б. Л. Абрамян.* Кручение упругих тел, Физматгиз, М., 1963. [9] *В. В. Новожилов,* Теория упругости, Судстройиздат, М.—Л., 1962.