ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXIV 1982 3

УДК 519.1

МАТЕМАТИКА

Л. А. Асланян

Дискретная изопериметрическая задача—асимптотический случай

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. Р. Варшамовым 8/IX 1981)

В данной статье приводятся исследования по дискретной изопериметрической задаче ([1,2]) в асимптотическом случае с использованием метода работы ([3]). Одновременно обсуждаются некоторые следствия, получаемые из основной изопериметрической теоремы.

1. Рассмотрим множество E^n вершин n-мерного единичного куба. Пусть $\mathfrak{M}_a=\{A\subseteq E^n, |A|=a\}$, $0\leqslant a=2^{n-1}(1+\alpha(n))\leqslant 2^n$ и $\mathfrak{M}=\bigcup\mathfrak{M}_a$. Для произвольного $A\in\mathfrak{M}$ вершину $\tilde{\alpha}\in A$ назовем внутренней для A, если $S_1^n(\tilde{\alpha})\subseteq A$, где $S_1^n(\tilde{\alpha})$—шар радиуса 1 в метрике Хэмминга с центром $\tilde{\alpha}$. $B(A)$ множество всех внутренних вершин подмножества A. Вопросам поиска максимальных значений $|B(A)|$, $A\in\mathfrak{M}_a$ был посвящен ряд работ ([4]). Ниже мы формулируем утверждения, характеризующие типичные значения $|B(A)|$.

Подмножество $A\subseteq E^n$ назовем γ-компактным, если $\gamma(A)=|B(A)|/|A|=\gamma$, $0\leqslant\gamma\leqslant 1$. Обозначим через $m(\gamma)$ $(m_a(\gamma))$ долю тех подмножеств $A\in\mathfrak{M}$ $(A\in\mathfrak{M}_a)$, которые γ-компактны. Соответственно $\overline{m}(\gamma)$ и $\overline{m}_a(\gamma)$ доли тех подмножеств $A\in\mathfrak{M}$ и $A\in\mathfrak{M}_a$, для которых $\gamma(A)\geqslant\gamma$. При $n\to\infty$ эти определения нужно понимать в смысле $\gamma(A)\sim\gamma$ и $\gamma(A)\gtrsim\gamma$.

а) для почти всех подмножеств $A\subseteq E^n$ $\gamma(A)\to 0$ при $n\to\infty$. Если k—произвольное целое число, $k\geqslant 0$, то $m\left(\frac{k}{2^{n-1}}\right)\sim\frac{1}{2^k k!\sqrt{e}}$ при $n\to\infty$ и $\overline{m}\left(\frac{\gamma(n)}{2^n}\right)\to 0$ при $\gamma(n)\to\infty$;

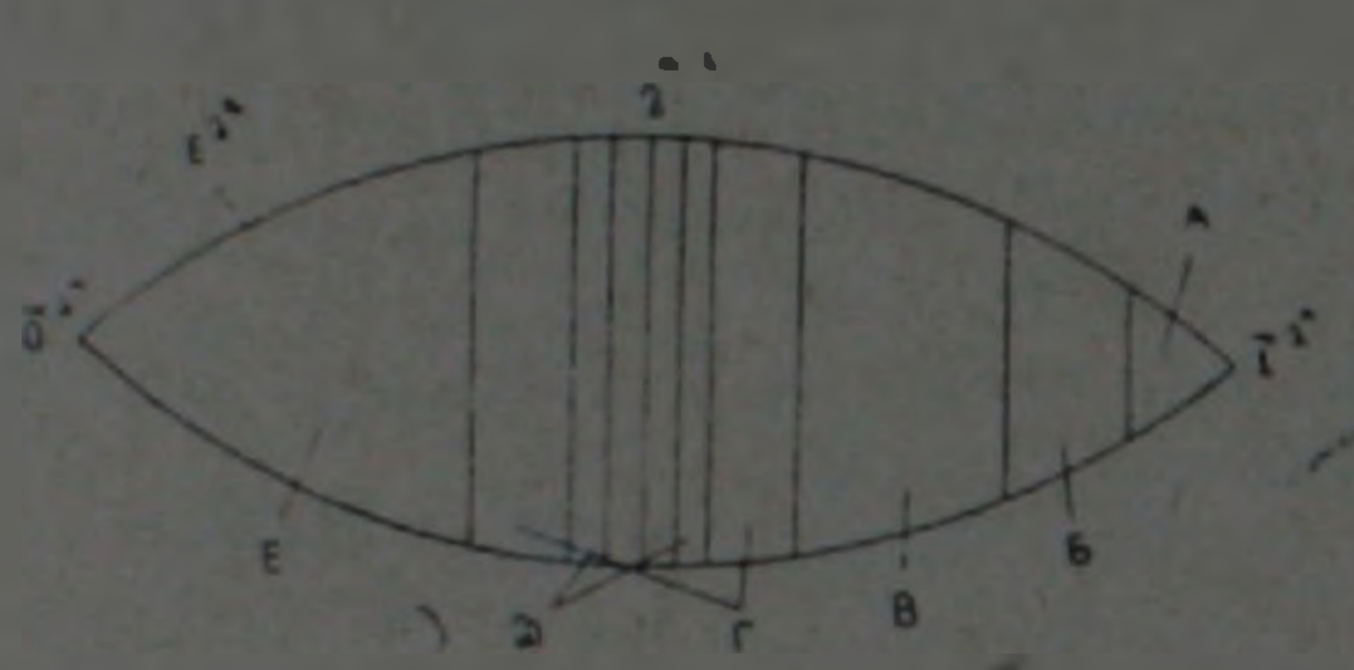
б) если $n\alpha(n)\to-\infty$ при $n\to\infty$, то для почти всех подмножеств $A\in\mathfrak{M}_a$ $\gamma(A)=0$;

в) если $n\alpha(n)\to\infty$ при $n\to\infty$, то $m_a\left(\left(\frac{1+\alpha(n)}{2}\right)^n\right)\to 1$. Если $1-\alpha(n)\sim\frac{c}{n}$, $c>0$, то для почти всех множеств $A\in\mathfrak{M}_a$ $\gamma(A)\sim e^{-c/2}$, для $1-\alpha(n)=o\left(\frac{1}{n}\right)$ $m_a(1)\to 1$;

г) при $n\alpha(n)\to\infty$ для почти всех $B\in\mathfrak{M}_b$, $|b-a|=o\left(\frac{2^n}{n}\right)$ $\gamma(B)\sim\left(\frac{1+\alpha(n)}{2}\right)^n\sim\gamma(A)$;

д) если $n\alpha(n)\to\lambda$ при $n\to\infty$, то $m_n\left(\frac{k}{2^{n-1}}\right)\to\frac{1}{k!}\left(\frac{e^{\lambda}}{2}\right)^k e^{-\frac{e^{\lambda}}{2}}$, $\bar{m}_n\left(\frac{\gamma(n)}{2^{n-1}}\right)\to 0$ при $\gamma(n)\to\infty$. Случай $\lambda=0$ полезно сопоставить с а).

Приведем схематическое представление этих утверждений. Разместим вершины 2^n-мерного единичного куба E^{2^n}, как обычно, по слоям и упорядочим эти слои по возрастанию. Тогда вершины E^{2^n} кодируют подмножества E^n, и выполнение утверждений а) – д) в слоях E^{2^n} представляет собой следующую картину:



A—на слоях с номерами от $2^n-o\left(\frac{2^{n-1}}{n}\right)$ до 2^n для почти всех подмножеств $\gamma\sim 1$;

$Б$—на слоях с номерами $2^n-\frac{c2^{n-1}}{n}$, где c эквивалентно некоторой положительной постоянной, для почти всех подмножеств $\gamma\sim e^{-c/2}$,

$В$—на слоях с номерами $2^{n-1}+\frac{\varphi(n)}{n}2^{n-1}$, где $\varphi(n)$ как угодно медленно растущая функция, для почти всех подмножеств $\gamma\sim\left(\frac{1+\alpha(n)}{2}\right)^n$. Если a и b номера двух таких слоев, и γ_1 и γ_2—значения параметра γ для них, то при $|a-b|=o\left(\frac{2^n}{n}\right)$ $\gamma_1\sim\gamma_2$;

$Г$—на слоях с интервала $2^{n-1}\pm c\frac{2^{n-1}}{n}$ точное распределение представлено в пункте д);

$Д$—на слоях с интервала $2^{n-1}\pm o\left(\frac{2^{n-1}}{n}\right)$ имеет место ситуация, аналогичная представленной в а) (отметим, что на слоях с номерами $2^{n-1}\pm\varphi(n)2^{n/2}$ находятся коды почти всех подмножеств E^n);

E—на слоях с номерами $2^{n-1}-\varphi(n)\dfrac{2^{n-1}}{n}$ для почти всех подмножеств $\gamma=0$.

Перейдем сейчас к формулировке тех утверждений, следствиями которых являются пункты а)—д).

Математическое ожидание и дисперсия числа внутренних вершин подмножеств класса $\mathfrak{M}_a$ выражаются соответственно формулами:

$$M_a(|B(A)|)=2^n C^{a-n-1}_{2^n-n-1}/C^a_{2^n},$$

$$D_a(|B(A)|)=2^n\frac{C^{a-n-1}_{2^n-n-1}}{C^a_{2^n}}+2^n(n+C^2_n)\frac{C^{a-2n}_{2^n-2n}}{C^a_{2^n}}+$$

$$+2^n(2^n-1-n-C^2_n)\frac{C^{a-2n-2}_{2^n-2n-2}}{C^2_{2^n}}-\left(2^n\frac{C^{a-n-1}_{2^n-n-1}}{C^a_{2^n}}\right)^2.$$

Лемма 1. *Если при* $n\to\infty$

а) $n\alpha(n)\to-\infty$, *то* $M_a(|B(A)|)\to 0$,

б) $n\alpha(n)\to\infty$, *то* $M_a(|B(A)|)\sim\dfrac{(1+\alpha(n))^n}{2}\to\infty$,

в) $n\alpha(n)\to\mathrm{const}$, *то* $M_a(|B(A)|)\sim\dfrac{1}{2}\cdot\exp(n\alpha(n))$.

Лемма 2. *Если* $n\alpha(n)\to\infty$, *то* $\dfrac{D_a(|B(A)|)}{M^2_a(|B(A)|)}\to 0$ *при* $n\to\infty$.

Эти утверждения на основе неравенств Чебышева и составляют доказательство некоторых утверждений пунктов а)—д). Остальные доказательства пунктов а)—д) основываются на использовании теоремы непрерывности производящих функций случайных величин.

Рассмотрим целочисленную случайную величину ξ, принимающую значение $n\in N$ с вероятностью p_n. Факториальный момент r-го порядка для случайной величины ξ определяется формулой

$$\alpha_{[r]}=M\xi(\xi-1)\cdot\ \ldots\ \cdot(\xi-r+1).$$

В качестве ξ мы будем рассматривать число внутренних вершин подмножеств $A\in\mathfrak{M}_a$ при равномерном распределении вероятностей над $\mathfrak{M}_a$. Обозначим через b_r среднее число неупорядоченных r-ок внутренних вершин по всем подмножествам системы $\mathfrak{M}_a$, тогда

Лемма 3. *Если* $\dfrac{n^2r^2 2^{4r^2}}{2^n(1+\alpha(n))^{4r^2}}\to 0$ *при* $n\to\infty$, *то*

$$b_r\leq C^r_{2^n}\cdot\left(\frac{1+\alpha(n)}{2}\right)^{r(n+1)}.$$

Важным следствием этой леммы является следующее утверждение. Если $r\leq n^{1/3}$, то при $n\to\infty$ равномерно по r

$$b_r\sim\frac{1}{r!}\cdot\left(\frac{(1+\alpha(n))^{n+1}}{2}\right)^r.$$

Таким образом, для слабо растущих r факториальные моменты рассматриваемой случайной величины ξ равномерно эквивалентны факториальным моментам Пуассоновского распределения со средним значением $\frac{(1+\alpha(n))^{n+1}}{2}$. Отсюда непосредственно можно перейти к доказательству сходимости соответствующих производящих функций. Производящая функция факториальных моментов определяется формулой $\gamma(s)=\sum_{k=0}^{\infty} s^k p_k$ для тех значений s, при которых ряд сходится.

Теорема непрерывности для производящих функций факториальных моментов гласит, что для случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ со спектральными значениями $0, 1, \ldots, m, \ldots$ и производящими функциями $\gamma_{\xi_1}(s)$, $\gamma_{\xi_n}(s), \ldots, \gamma_{\xi_n}(s), \ldots$ $\lim_{n\to\infty} p_{\xi_n}(t)=p_{\xi}(t)$, t—произвольное число тогда и только тогда, когда $\lim_{n\to\infty}\gamma_{\xi_n}(s)=\gamma_{\xi}(s)$ при $0\leqslant s\leqslant 1$.

Можно убедиться, что для рассматриваемых нами производящих функций справедливо представление $\gamma(s)=\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_{[k]}\frac{(s-1)^k}{k!}$. Таким образом, нам остается доказать сходимость соответствующих степенных рядов, при $-1\leqslant s-1\leqslant 0$, что легко сделать, если учесть, что эти ряды абсолютно сходящиеся.

В заключение этой части отметим, что содержание (³) непосредственно означает, что доли всех подмножеств E^n при фиксированном числе внутренних вершин также подчинены распределению Пуассона со средним значением $\tau=\frac{1}{2}$.

II. Множество $A\subseteq E^n$ критическое по компактности, если удаление произвольной ее вершины уменьшает число внутренних вершин, $|B(A)|$. Если стандартное размещение обладает данным свойством, то соответствующая мощность $|A|$ называется критической по компактности.

Множество $A\subseteq E^n$ критическое по соседству, если к нему нельзя прибавить вершины так, чтобы окаймление $O(A)=\Gamma(E^n\setminus A)$ не увеличилось. Если стандартное размещение обладает данным свойством, то соответствующая мощность называется критической по соседству.

Пусть $a=\sum_{i=0}^{k} C_n^i+\delta$, $0\leqslant\delta<C_n^{k+1}$. Обозначим через K_k и K_c соответственно (через k_k и k_c) множество всех тех a (δ), которые критические по компактности и по соседству*.

Лемма 4. *В стандартной последовательности L^n все вершины $\bar{\alpha}_t$, $t\in K_c$ непосредственно предшествуют вершинам $\bar{\alpha}_p$, $p\in K_k$.*

Структура множества K_k в L^n допускает простое описание: $t\in K_k$ тогда и только тогда, когда $\bar{\alpha}_t\in E^n(x_n=1)$. В частности $|K_k|=2^{n-1}$, и множество K_c на основе сделанного замечания может быть описано

---

* Отметим, что в формулировке теоремы 7 (²) об условиях минимальности $O(A)$ (с точностью до изоморфизма) упущено условие $\delta\in k_c$.

следующим образом: $t\in K_c$ тогда и только тогда, когда $\bar{\alpha}_t$ построено следующим образом: для некоторого i, $1\leqslant i\leqslant n$ $\alpha_{ti}=0$, $\alpha_{tj}=1$ для всех $i<j\leqslant n$ и для $i-1$, если $i-1\geqslant 1$, а другие координаты $\bar{\alpha}_t$ произвольные. Отсюда, в частности, получаем, что $|K_c|=2^{n-1}$.

III. В этом пункте мы формулируем утверждения, аналогичные I для разбиений n-мерного единичного куба. Под разбиением E^n мы подразумеваем его представление в виде $\pi=(A, E^n\setminus A)$, где A произвольное подмножество E^n. В некоторых задачах теории распознавания образов представляют интерес такие числовые параметры разбиений, как $|B(\pi)|=|B(A)|+|B(E^n\setminus A)|$, $\gamma(\pi)=|B|(\pi)/2^n$ и др. Они в каком-то, смысле выражают простоту рассматриваемого разбиения π.

1) Если $n\to\infty$, то доля тех разбиений, для которых $|B(\pi)|=k|$ стремится к $\dfrac{1}{k!e}$.

2) Если рассмотреть все разбиения E^n, когда мощности составляющих подмножеств зафиксированы $-(a,\ 2^n-a)$, то

а) если при $n\to\infty$ $n|\alpha(n)|\to\infty$, то для почти всех разбиений $|B(\pi)|\sim\dfrac{1}{2}(1+|\alpha(n)|)^{n+1}$;

в) если $n|\alpha(n)|\to\lambda$, то доля тех разбиений, для которых $|B(\pi)|=k$, стремится к $\dfrac{1}{k!}e^{\lambda k}e^{-e^{\lambda}}$.

Вычислительный центр Академии наук
Армянской ССР и Ереванского государственного
университета

Լ. Հ. ԱՍԼԱՆՅԱՆ

Դիսկրետ իզոպերիմետրիկ խնդիր—ասիմպտոտիկ դեպք

Հոդվածում շարունակվում է դիսկրետ իզոպերիմետրիկ խնդրի ուսումնասիրությունը ([1,2]) ասիմպտոտիկ դեպքում։ Աշխատանքը հենվում է ([3])-ի մեթոդի վրա։ Ապացուցվում է, որ n-չափանի միավոր E^n խորանարդի ֆիքսված հզորության ենթաբազմությունների մասը, որոնք ունեն նշված թվով ներքին կետեր, բավարարում է Պուասոնի հավանականային բաշխմանը։ Դիտարկվում են նաև հիմնական իզոպերիմետրիկ թեորեմի որոշ հետևանքներ, կապված կրիտիկական հզորությունների հետ։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Л. А. Асланян, В. М. Караханян, Б. Е. Торосян,* ДАН АрмССР, т. 65, № 5 (1977). [2] *Л. А. Асланян, В. М. Караханян,* ДАН АрмССР, т. 65, № 4 (1977).
[3] *И. А. Акопови, Л. А. Асланян,* Учен. зап. ЕГУ, № 1, 1980.