ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXIV 1982 1

УДК 539.376

ТЕОРИЯ ПОЛЗУЧЕСТИ

С. М. Мхитарян

К напряженному состоянию деформирующегося по степенному закону бесконечного пространства с разрезом в виде полосы или полуплоскости

(Представлено академиком АН Армянской ССР Н. Х. Арутюняном 9/VI 1981)

Решения многочисленных задач о напряженном состоянии тел с разрезом различных геометрических форм приведены в известных монографиях ([1–6]), где одновременно освещено современное состояние механики разрушения. В этом направлении укажем также на работу ([7]).

В настоящей статье в рамках нелинейной теории установившейся ползучести при степенной зависимости между интенсивностями напряжений и скоростями деформаций рассматриваются задачи о напряженном состоянии бесконечного пространства с разрезом в виде полосы или полуплоскости. Предварительно выводится ключевое интегральное уравнение для произвольной конфигурации плоского разреза в бесконечном пространстве. При этом существенно используются результаты работ ([8–10]). Задача же о разрезе в виде полуплоскости, содержащемся в линейно-упругом пространстве, была решена в ([11]).

1. Пусть бесконечное пространство, отнесенное к правой декартовой системе координат $0xyz$, в своей плоскости $z=0$ содержит разрез в виде произвольной области ω. Далее, пусть к берегам этого разреза приложены только одинаковые вертикальные силы $\sigma_z|_{z=\pm 0}=-p(x, y)$. Для материала пространства будем считать справедливым нелинейный физический закон ([8–10]) $\varepsilon=A\sigma^m$, где ε—интенсивность скоростей деформаций, σ — интенсивность касательных напряжений, A — физическая константа, а m—показатель ползучести $(m>1)$.

Выведем разрешающие уравнения задачи. С этой целью бесконечное пространство мысленно разделим на верхнее и нижнее полупространства. Тогда, придерживаясь обобщенного принципа суперпозиции, для перемещений* точек граничной плоскости верхнего (с индексом $+$) и нижнего (с индексом $-$) полупространств при условии несжимаемости материала и при произвольной вертикальной нагрузке $\sigma_0(x, y)$ будем иметь ([10])

* $w_{\pm}(x, y)$ фактически будут скорости, а не перемещения. Однако для простоты в дальнейшем будем употреблять термин „перемещения".

$$w_{\pm}(x, y) = \pm \vartheta \left\{ \iint\limits_{\Pi} \frac{\sigma_0(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta}{[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2]^{1-\mu/2}} \right\}^m \quad ((x, y)\in\Pi), \tag{1.1}$$

где ϑ — определенная комбинация физических констант, $\mu = 1/m$, причем $2/3<\mu<1$, а вообще $0<\mu<1$, и Π — вся плоскость $z=0$. Отметим, что при $\mu=1$ имеем случай линейной упругости.

Далее, введем в рассмотрение скачок перемещений

$$\chi(x, y) = w_+(x, y) - w_-(x, y) \quad ((x, y)\in\Pi) \tag{1.2}$$

и полные нормальные напряжения

$$\sigma_0(x, y) = \begin{cases} p(x, y) & ((x, y)\in\omega) \\ \sigma(x, y) & ((x, y)\in\Pi/\omega) \end{cases}, \tag{1.3}$$

где $\sigma(x, y)$ — неизвестные нормальные напряжения вне разреза ω. Приняв во внимание (1.1), при помощи (1.2) и (1.3) получим

$$\iint\limits_{\Pi} \frac{\sigma_0(\xi, \eta)\, d\xi d\eta}{[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2]^{1-\mu/2}} = \begin{cases} \dfrac{\varphi(x, y)}{2(\vartheta)^{\mu}} & ((x, y)\in\omega) \\ 0 & ((x, y)\in\Pi/\omega), \end{cases} \tag{1.4}$$

где $\varphi(x, y) = \chi^{\mu}(x, y)((x, y)\in\omega)$. К обеим частям (1.4) применим двумерное интегральное преобразование Фурье. Воспользовавшись известной формулой 3.773.6 ([12], 443), придем к алгебраическому соотношению

$$\Sigma_0(\lambda, s) = \frac{2^{1-\mu}\Gamma(1-\mu/2)}{2\pi(2\vartheta)^{\mu}\,\Gamma(\mu/2)}\,(\lambda^2+s^2)^{\mu/2}\,\Phi(\lambda, s), \tag{1.5}$$

где

$$\Sigma_0(\lambda, s) = \iint\limits_{\Pi} \sigma_0(x, y) e^{i(\lambda x+sy)} dx dy;$$

$$\Phi(\lambda, s) = \iint\limits_{\Pi} \varphi(x, y) e^{i(\lambda x+sy)} dx dy,$$

а $\Gamma(\mu)$ — гамма-функция Эйлера.

Теперь положим

$$\Sigma_0(\lambda, s) = -(\lambda+is)\Psi_0(\lambda, s); \quad \Psi_0(\lambda, s) = \iint\limits_{\Pi} \psi_0(x, y) e^{i(\lambda x+sy)} dx dy \tag{1.6}$$

и к (1.5) применим формулу обращения Фурье. После простых операций будем иметь

$$\psi_0(x, y) = -\frac{1}{4\pi^2(2\vartheta)^{\mu}} \iint\limits_{\omega} \frac{\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial\eta} + i\dfrac{\partial\varphi}{\partial\xi}\right) d\xi d\eta}{[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2]^{\mu/2}} \quad ((x, y)\in\Pi).$$

Наконец, заметив, что согласно (1.6)

$$\sigma_0(x, y) = \frac{\partial\psi_0}{\partial y} - i\frac{\partial\psi_0}{\partial x},$$

получим ключевое уравнение задачи:

$$\sigma_0(x, y) = -\frac{1}{4\pi^2(2\vartheta)^\mu}\left(\frac{\partial}{\partial y} - i\frac{\partial}{\partial x}\right)\iint\limits_{\omega}\frac{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\eta} + i\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\right)d\xi d\eta}{[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2]^{\mu/2}} \quad ((x,y)\in\Pi). \tag{1.7}$$

Далее, сопоставление (1.3) и (1.7) для определения раскрытия разреза дает интегро-дифференциальное уравнение

$$\left(\frac{\partial}{\partial y} - i\frac{\partial}{\partial x}\right)\iint\limits_{\omega}\frac{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\eta} + i\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\right)d\xi d\eta}{[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2]^{\mu/2}} = -4\pi^2(2\vartheta)^\mu p(x, y) \quad ((x, y)\in\omega), \tag{1.8}$$

а для разрушающих нормальных напряжений — формулу

$$\sigma(x, y) = -\frac{1}{4\pi^2(2\vartheta)^\mu}\left(\frac{\partial}{\partial y} - i\frac{\partial}{\partial x}\right)\iint\limits_{\omega}\frac{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\eta} + i\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\right)d\xi d\eta}{[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2]^{\mu/2}} \quad ((x,y)\in\Pi/\omega). \tag{1.9}$$

При этом уравнение (1.8) должно рассматриваться при условии

$$\varphi(x, y)/\Gamma_0 = 0, \tag{1.10}$$

где Γ_0—граничный контур области ω. (1.10) выражает условие непрерывности вертикальных перемещений на контуре Γ_0.

Таким образом, (1.8) и (1.9) являются разрешающими уравнениями поставленной задачи.

В частности, пусть разрез имеет вид бесконечной полосы или полуплоскости. Тогда

$$\omega = \{-\infty < x < \infty;\ -a \leqslant y \leqslant a\}; \quad \omega = \{-\infty < x < \infty;\ 0 \leqslant y < \infty\}$$

соответственно. В этих случаях к уравнениям (1.8) и (1.9), а также условию (1.10) можно применить преобразование Фурье по переменной x и в результате прийти к следующим одномерным разрешающим уравнениям в образах Фурье:

$$\left(\frac{d}{dy} - \lambda\right)\int\limits_L \frac{K_\nu(\lambda|y-\eta|)}{(y-\eta)^\nu}\left[\frac{d\varphi_\lambda}{d\eta} + \lambda\varphi_\lambda(\eta)\right]d\eta = -h(\lambda)p_\lambda(y) \quad (y\in L)\ (\lambda > 0); \tag{1.11}$$

$$\sigma_\lambda(y) = -\frac{1}{h(\lambda)}\left(\frac{d}{dy} - \lambda\right)\int\limits_L \frac{K_\nu(\lambda|y-\eta|)}{|y-\eta|^\nu}\left[\frac{d\varphi_\lambda}{d\eta} + \lambda\varphi_\lambda(\eta)\right]d\eta \quad (y\in L'), \tag{1.12}$$

где $L = \{-a \leqslant y \leqslant a\}$ или $L = \{0 \leqslant y < \infty\}$ соответственно случаям полосы или полуплоскости, L'—дополнительный к L интервал, $K_\nu(y)$—известная функция Макдональда, а

$$\nu = \frac{\mu - 1}{2}; \qquad h(\lambda) = 2\pi^{3/2}(2\vartheta)^\mu 2^\nu\Gamma(\mu/2)\lambda^{-\nu};$$

$$p_\lambda(y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} p(x, y)e^{i\lambda x}\,dx; \quad \sigma_\lambda(y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\sigma(x, y)e^{i\lambda x}dx; \tag{1.13}$$

$$\varphi_\lambda(y)=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x,y)e^{i\lambda x}dx,$$

При этом условие (1.10) принимает вид

$$\varphi_\lambda(y)|_{y=\pm a}=0;\quad \varphi_\lambda(y)|_{y=0}=0 \tag{1.14}$$

соответственно случаям полосы и полуплоскости.

2. Решение уравнений (1.11) и (1.12), когда $L=\{-a\leqslant y\leqslant a\}$, можно получить при помощи нового спектрального соотношения для сфероидальных волновых функций, установленного автором. Однако построение этого решения ввиду своей масштабности составляет предмет отдельного исследования и выходит за рамки настоящей заметки. Поэтому здесь ограничимся рассмотрением указанных уравнений в случае $L=\{0\leqslant y<\infty\}$. При этом будем пользоваться известным спектральным соотношением ([13])

$$\int_0^\infty \frac{K_{\frac{\mu-1}{2}}(\lambda|y-\eta|)}{|y-\eta|^{\frac{\mu-1}{2}}}\cdot\frac{L_n^{\mu/2-1}(2\lambda\eta)d\eta}{e^{\lambda\eta}\eta^{1-\mu/2}}=\frac{\lambda_n}{\sqrt{\lambda}}e^{-\lambda y}L_n^{\mu/2-1}(2\lambda y)\quad (y>0)$$

$$(n=0,\ 1,\ \ldots;\ \lambda>0) \tag{2.1}$$

а также родственным интегральным соотношением

$$\int_0^\infty \frac{K_{\frac{\mu-1}{2}}(\lambda|y-\eta|)}{|y-\eta|^{\frac{\mu-1}{2}}}\frac{L_n^{\mu/2-1}(2\lambda\eta)d\eta}{e^{\lambda\eta}\eta^{1-\mu/2}}=\frac{\mu_n}{\sqrt{\lambda}}e^{\lambda y}\Psi(n+\mu/2,\mu/2;-2\lambda y)\quad (\lambda>0;\ y<0). \tag{2.2}$$

Здесь $L_n^a(y)$—известные многочлены Чебышева—Лагерра, $\Psi(a,c,y)$—вырожденная гипергеометрическая функция Трикоми, а

$$\lambda_n=\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(1-\mu/2)\Gamma(n+\mu/2)}{\sqrt{2}\,n!};\qquad \mu_n=\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma^2(n+\mu/2)}{\sqrt{2}\,n!\,\Gamma(\mu/2)}.$$

Оба соотношения можно получить при помощи методов теории потенциала, связанной с уравнением*

$$\frac{\partial^2U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2U}{\partial z^2}+\frac{1-\mu}{z}\,\frac{\partial U}{\partial z}=0.$$

Теперь обратим входящий в (1.11) дифференциальный оператор. В результате придем к уравнению

$$\int_0^\infty \frac{K_{\frac{\mu-1}{2}}(\lambda|y-\eta|)}{(y-\eta)^{\frac{\mu-1}{2}}}\left[\frac{d\varphi_\lambda}{d\eta}+\lambda\varphi_\lambda(\eta)\right]d\eta=h(\lambda)q_\lambda(y)\quad (y>0), \tag{2.3}$$

где

$$q_\lambda(y)=\int_y^\infty e^{\lambda(y-\eta)}p_\lambda(\eta)d\eta. \tag{2.4}$$

---

* Эти результаты получены автором и в настоящее время находятся в печати.

Решение уравнения (2.3) представим в виде

$$\frac{d\varphi_\lambda}{dy}+\lambda\varphi_\lambda(y)=e^{-\lambda y}y^{\mu/2-1}\sum_{n=0}^{\infty}x_nL_n^{\mu/2-1}(2\lambda y)\quad(y>0). \tag{2.5}$$

Далее, воспользовавшись (2.1) и условием ортогональности многочленов Чебышева—Лагерра, находим

$$x_n=\sqrt{\lambda}\,h(\lambda)\frac{a_n(\lambda)}{\lambda_n h_n}\quad(n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots), \tag{2.6}$$

где

$$h_n=\frac{\Gamma(n+\mu/2)}{n!(2\lambda)^{\mu/2}},\qquad a_n(\lambda)=\int_0^\infty e^{-\lambda y}y^{\mu/2-1}q_\lambda(y)L^{\mu/2-1}(2\lambda y)dy.$$

Затем из (2.5) получим

$$\varphi_\lambda(y)=Ce^{-\lambda y}+\int_0^y e^{-\lambda(y-\eta)}f(\eta)d\eta,$$

где

$$f(y)=e^{-\lambda y}y^{\mu/2-1}\sum_{n=0}^{\infty}x_nL_n^{\mu/2-1}(2\lambda y).$$

Приняв во внимание известную формулу ([14], с. 191, формула (30)), после простых выкладок будем иметь

$$\varphi_\lambda(y)=Ce^{-\lambda y}+e^{-\lambda y}y^{\mu/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x_n}{n+\mu/2}L_n^{\mu/2}(2\lambda y)\quad(y\geqslant0). \tag{2.7}$$

Отсюда при помощи второго условия (1.14) непосредственно вытекает, что $C=0$.

Теперь (2.4) подставим в выражение коэффициентов $a_n(\lambda)$, поменяем порядок интегрирования и опять учтем только что указанную формулу из ([14]). В результате

$$a_n(\lambda)=\frac{p_n(\lambda)}{n+\mu/2}\qquad(n=0,\ 1,\ 2\ \ldots),$$

где

$$p_n(\lambda)=\int_0^\infty p_\lambda(\eta)e^{-\lambda\eta}\eta^{\mu/2}L_n^{\mu/2}(2\lambda\eta)d\eta. \tag{2.8}$$

Последние формулы вместе с формулами (2.6) позволяют образ Фурье раскрытия полубесконечного разреза из (2.7) записать в следующем окончательном виде:

$$\varphi_\lambda(y)=\sqrt{\lambda}\,h(\lambda)e^{-\lambda y}y^{\mu/2}\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n^\mu(\lambda)\,p_n(\lambda)L_n^{\mu/2}(2\lambda y)\qquad(y\geqslant0), \tag{2.9}$$

где

$$\alpha_n^\mu(\lambda)=\frac{\sqrt{2}\,(2\lambda)^{\mu/2}(n!)^2}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(1-\mu/2)\Gamma^2(n+\mu/2)(n+\mu/2)^2},$$

причем для коэффициентов x_n будем иметь формулу

$$x_n = \sqrt{\lambda}\, h(\lambda)\, \alpha_n^{\mu}(\lambda)(n+\mu/2)p_n(\lambda) \quad (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots). \tag{2.10}$$

Перейдем к разрушающим напряжениям. Подставляя (2.5) в (1.12) и учитывая (2.2) и (2.10), будем иметь

$$\sigma_\lambda(y) = -\frac{(2\lambda)^{\mu/2}\pi}{\sin\left(\frac{\pi\mu}{2}\right)}\left(\frac{d}{dy}-\lambda\right)\left[e^{\lambda y}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!\, p_n(\lambda)}{n+\mu/2}\,\Psi(n+\mu/2,\ \mu/2;\ -2\lambda y)\right] \quad (y<0). \tag{2.11}$$

Далее, приняв во внимание известное представление функции $\Psi(a, c, x)$ (([15]), с. 245, формула (7)), можем записать

$$\frac{d}{dy}\Psi(n+\mu/2,\ \mu/2;\ -2\lambda y) = (2n+\mu)\lambda\left[\frac{\Gamma(-\mu/2)}{\Gamma(n+1)}\Phi(n+1+\mu/2,\ 1+\mu/2;\ -2\lambda y) + \right.$$

$$\left. + \frac{\Gamma(\mu/2)}{\Gamma(n+1+\mu/2)}(-2\lambda y)^{-\mu/2}\Phi(n+1,\ 1-\mu/2;\ -2\lambda y)\right],$$

где $\Phi(a, c; x)$—вырожденная гипергеометрическая функция. При помощи этого равенства из (2.11) определим коэффициент интенсивности напряжений. А именно,

$$K_\lambda = \lim_{y\to -0}(-y)^{\mu/2}\sigma_\lambda(y) = -\frac{2\lambda}{\Gamma(1-\mu/2)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!\, p_n(\lambda)}{\Gamma(n+1+\mu/2)}. \tag{2.12}$$

Рассмотрим частный случай нагружения берегов полубесконечного разреза, когда

$$p(x, y) = \frac{P}{2}\left[\delta(x-x_0)+\delta(x+x_0)\right]\delta(y-y_0),$$

где $\delta(x)$—известная дельта-функция Дирака. Тогда из (1.13) и (2.8)

$$p_\lambda(y) = P\cos(\lambda x_0)\delta(y-y_0); \quad p_n(\lambda) = P\cos(\lambda x_0)e^{-\lambda y_0}y_0^{\mu/2}L_n^{\mu/2}(2\lambda y_0).$$

Подставляя это выражение $p_n(\lambda)$ в (2.9) и (2.12), получим

$$\varphi_\lambda(y) = \sqrt{\lambda}\, h(\lambda)P\cos(\lambda x_0)(yy_0)^{\mu/2}e^{-\lambda(y+y_0)}\times$$

$$\times\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n^{\mu}(\lambda)L_n^{\mu/2}(2\lambda y_0)L_n^{\mu/2}(2\lambda y) \quad (y\geqslant 0);$$

$$K_\lambda = -\frac{2P\lambda\cos(\lambda x_0)}{\Gamma(1-\mu/2)}e^{-\lambda y_0}y_0^{\mu/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!\, L_n^{\mu/2}(2\lambda y_0)}{\Gamma(n+1+\mu/2)}.$$

При помощи известных асимптотических представлений многочленов $L_n^{\alpha}(y)$ (([14]), с. 200—201) легко убедиться, что эти ряды сходятся.

После того как определены образы Фурье искомых величин, они сами могут быть найдены формулой обращения Фурье.

В заключение отметим, что на основе работ ([16,17]) полученные здесь результаты могут быть легко распространены на случай линейно-упругого пространства, модуль упругости которого по координате z изменяется по степенному закону.

Институт механики
Академии наук Армянской ССР

Ս. Մ. ՄԽԻԹԱՐՅԱՆ

Շերտի կամ կիսահարթության տեսքի ճաքով ըստ աստիճանային օրենքի դեֆորմացվող անվերջ տարածության լարվածային վիճակի շուրջը

Հաստատված սողքի ոչ-գծային տեսության շրջանակներում լարումների և դեֆորմացիաների արագությունների միջև աստիճանային կախվածության առկայության դեպքում դիտարկվում է խառը եզրային խնդիրը, որը վերաբերում է շերտի կամ կիսահարթության տեսքի ճաք պարունակող անվերջ տարածությանը։ Անվերջ տարածության մեջ հարթ ճաքի ցանկացած կոնֆիգուրացիայի դեպքում նախապես արտածվում է խնդրի որոշիչ ինտեգրալ հավասարումը։ Վերջինիս կորիզը իրենից ներկայացնում է արգումենտների բացարձակ տարբերությունից կախված Մակդոնալդի ֆունկցիան։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Г. П. Черепанов*, Механика хрупкого разрушения. Наука, М., 1974. [2] *В. З. Партон, Е. М. Морозов*, Механика упруго-пластического разрушения, Наука, М., 1974. [3] Разрушение (ред. Г. Либовиц), т. II, Мир, М., 1975. [4] Прикладные вопросы вязкости разрушения, Мир, М., 1968. [5] *В. В. Панасюк, М. П. Саврук, А. П. Дацышин*. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках, Наукова думка, Киев, 1976. [6] *Н. И. Мусхелишвили*, Некоторые основные задачи математической теории упругости, Наука, М., 1966. [7] *Р. В. Гольдштейн*, К пространственной задаче теории упругости для тел с плоскими трещинами произвольного разрыва, Ин-т проблем механики АН СССР, Препринт № 122, М., 1979. [8] *Н. Х. Арутюнян*, ПММ, т. 23, вып. 5 (1959). [9] *Н. Х. Арутюнян, М. М. Манукян*, ПММ, т. 27, вып. 5 (1963). [10] *А. И. Кузнецов*, ПММ, т. 26, вып. 3 (1962). [11] *Я. С. Уфлянд*, Интегральные преобразования в задачах теории упругости, Наука, М., 1968. [12] *И. С. Градштейн, И. М. Рыжик*, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, Наука, М., 1971. [13] *Г. Я. Попов*, Журн. техн. физ., т. 35, вып. 3 (1965). [14] *Г. Бейтмен, А. Эрдейи*, Высшие трансцендентные функции, СМБ, т. II, Наука, М., 1974. [15] *Г. Бейтмен, А. Эрдейи*, Высшие трансцендентные функции, СМБ, т. I, Наука, 1973. [16] *Г. Я. Попов*, ПММ, т. 37, вып. 6 (1973). [17] *Н. А. Ростовцев*, ПММ, т. 28, вып. I, (1964).