

УДК 517.948

МЕХАНИКА

Г. И. Кресин, В. Г. Мазья

О принципе максимума для систем Ламе и Стокса в полупространстве

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР О. М. Сапонджяном 12/1 1981)

В настоящей работе рассматривается первая краевая задача для систем Ламе и Стокса в полупространстве $R_+^m = \{x = (x_1, \dots, x_m) : x_m > 0\}$. Найдена точная константа в неравенстве

$$|u(x)| \leq K \|u|_{x_m=0}\|_{C(R^{m-1})}, \quad (1)$$

где $x \in R_+^m$, а u — вектор перемещений или вектор скорости.

Неравенство (1) представляет собой частный случай известного принципа максимума Миранда—Агмона ⁽¹⁻³⁾, однако вопрос о точной константе, по-видимому, не изучался. Из формулы для константы K следует, что классический принцип максимума для систем Ламе и Стокса не имеет места.

Рассмотрим в полупространстве R_+^m систему Ламе

$$\mu \Delta u + (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} u = 0 \quad (2)$$

и систему Стокса

$$\nu \Delta u - \operatorname{grad} p = 0, \quad \operatorname{div} u = 0, \quad (3)$$

с краевым условием

$$u|_{x_m=0} = f, \quad (4)$$

где λ, μ — постоянные Ламе, ν — кинематический коэффициент вязкости, f — m -компонентная вектор-функция из пространства $C_0^\infty(R^{m-1})$.

Решением задачи (2), (4) назовем вектор-функцию $u \in C^\infty(\overline{R_+^m})$, допускающую оценку $O(|x|^{1-m})$. В случае задачи (3), (4) под решением будем понимать пару (u, p) , где u — вектор-функция, подчиненная тем же условиям, что и в случае задачи (2), (4), а p — скалярная функция из $C^\infty(\overline{R_+^m})$, $p(x) = O(|x|^{-m})$.

Как известно (см. ^(4,5)), задачи (2), (4) и (3), (4) однозначно разрешимы и имеет место представление

$$u(x) = \frac{2}{\omega_m} \int_{y_m=0}^* M_x \left(\frac{y-x}{|y-x|} \right) \frac{x_m}{|y-x|^m} f(y') dy'. \quad (5)$$

Здесь и далее: ω_m — площадь единичной $(m-1)$ -мерной сферы S^{m-1} ; $y = (y', y_m)$, $y' = (y_1, \dots, y_{m-1})$; $x=1$ для системы Стокса и $x = (\lambda + \mu)(\lambda + 3\mu)^{-1}$ для системы Ламе, а $M_x = (m \times m)$ — матрица с элементами

$$(1-x)\delta_{ij} + mx \frac{(y_i - x_i)(y_j - x_j)}{|y-x|^2}.$$

Основной результат работы содержится в следующей теореме.

Теорема. Для точной константы в неравенстве (1) имеет место формула

$$K = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)} \int_0^{\pi/2} \left((1-x)^2 + mx(mx - 2x + 2)\cos^2\theta \right)^{1/2} \sin^{m-2}\theta d\theta, \quad (6)$$

и при $x \neq 0$ справедливо неравенство $K > 1$.

В случае $x=1$, т. е. для m -мерной системы Стокса,

$$K = \left(\int_0^{\pi/2} \sin^m \theta d\theta \right)^{-1} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{m}{2} + 1\right)}{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}.$$

Прежде чем доказать эту теорему, сформулируем ее следствия, относящиеся к двумерному и трехмерному случаям.

Следствие 1. При $m=2$ точная константа в неравенстве (1) имеет вид

$$K = \frac{2}{\pi} (1+x) E \left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x} \right) = 1 + \frac{1}{2^2} x^2 + \dots + \left[\frac{(2k-3)!!}{2^k k!} \right]^2 x^{2k} + \dots,$$

где E — полный эллиптический интеграл второго рода. В частности, $K=4/\pi$ при $m=2$, $x=1$.

Следствие 2. Если $m=3$, то

$$K = \frac{1}{2} \left(1 + 2x + \frac{(1-x)^2}{\sqrt{3x(x+2)}} \log \frac{1+2x+\sqrt{3x(x+2)}}{1-x} \right)$$

и, в частности, $K=3/2$ при $m=3$, $x=1$.

Доказательство теоремы. Пусть x — фиксированная точка из R_+^m . Найдем норму отображения $C(R^{m-1}) \ni f \rightarrow u(x) \in R^m$.

Очевидно,

$$\frac{\omega_m}{2} \|u(x)\| = \sup_{|f| \leq 1} \left| \int_{y_m=0} M_x \left(\frac{y-x}{|y-x|} \right) f(y') \frac{x_m}{|y-x|^m} dy' \right| =$$

$$\begin{aligned}
&= \sup_{|f| \leq 1} \sup_{|z|=1} \left(z, \int_{y_m=0} M_x \left(\frac{y-x}{|y-x|} \right) f(y') \frac{x_m}{|y-x|^m} dy' \right) = \\
&= \sup_{|f| \leq 1} \sup_{|z|=1} \int_{y_m=0} \left(z, M_x \left(\frac{y-x}{|y-x|} \right) f(y') \right) \frac{x_m}{|y-x|^m} dy' = \\
&= \sup_{|z|=1} \sup_{|f| \leq 1} \int_{y_m=0} \left(M_x^* \left(\frac{y-x}{|y-x|} \right) z, f(y') \right) \frac{x_m}{|y-x|^m} dy'.
\end{aligned}$$

Здесь M_x^* — транспонированная матрица M_x . Ясно, что экстремум по f , $|f| \leq 1$, достигается на вектор-функции

$$\left| M_x^* \left(\frac{y-x}{|y-x|} \right) z \right|^{-1} M_x^* \left(\frac{y-x}{|y-x|} \right) z.$$

Поэтому

$$\|u(x)\| = \frac{2}{\omega_m} \sup_{|z|=1} \int_{y_m=0} \left| M_x^* \left(\frac{y-x}{|y-x|} \right) z \right| \frac{x_m}{|y-x|^m} dy'. \quad (7)$$

Используя определение матрицы M_x , получим

$$\begin{aligned}
\left| M_x^* \left(\frac{y-x}{|y-x|} \right) z \right| &= \left\{ \sum_{i=1}^m \left| (1-x)z_i + mx \sum_{j=1}^m \frac{(y_i-x_i)(y_j-x_j)}{|y-x|^2} z_j \right|^2 \right\}^{1/2} = \\
&= \left[(1-x)^2 + mx(mx-2x+2) \frac{(y-x, z)^2}{|y-x|^2} \right]^{1/2}. \quad (8)
\end{aligned}$$

Обозначим через S_{-}^{m-1} нижнюю половину единичной сферы в R^m с центром в точке x и через ξ — пересечение S^{m-1} с вектором $y-x$. Подставляя (8) в (7), получаем

$$\|u(x)\| = \frac{2}{\omega_m} \sup_{|z|=1} \int_{S_{-}^{m-1}} \left[(1-x)^2 + mx(mx-2x+2)(\xi-x, z)^2 \right]^{1/2} d\sigma(\xi).$$

Так как подынтегральная функция четна относительно $\xi-x$, то

$$\|u(x)\| = \frac{1}{\omega_m} \sup_{|z|=1} \int_{S^{m-1}} \left[(1-x)^2 + mx(mx-2x+2)(\xi-x, z)^2 \right]^{1/2} d\sigma(\xi).$$

Следовательно,

$$K = \frac{1}{\omega_m} \sup_{|z|=1} \int_{S^{m-1}} \left[(1-x^2) + mx(mx-2x+2)\cos^2\theta \right]^{1/2} d\sigma(\xi),$$

где θ — угол между $\xi-x$ и z . Так как последний интеграл не зависит от z , то

$$K = \frac{1}{\omega_m} \int_0^\pi \dots \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[(1-x^2) + mx(mx-2x+2)\cos^2\theta \right]^{1/2} \sin^{m-2}\theta \times$$

$$\begin{aligned} & \times \sin^m \theta_1 \dots \sin \theta_{m-3} d\theta_1 \dots d\theta_{m-2} = \frac{4\pi}{\omega_m} \left(\prod_{k=1}^{m-3} 2 \int_0^{\pi/2} \sin^k \varphi d\varphi \right) \times \\ & \times \int_0^{\pi/2} \left| (1-x)^2 + mx(mx-2x+2)\cos^2\theta \right|^{1/2} \sin^{m-2}\theta d\theta = \\ & = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)} \int_0^{\pi/2} \left| (1-x)^2 + mx(mx-2x+2)\cos^2\theta \right|^{1/2} \sin^{m-2}\theta d\theta. \end{aligned}$$

В частности, при $m=2$ и $m=3$ получаем, соответственно,

$$K = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \left| (1-x)^2 - 4x\cos^2\theta \right|^{1/2} d\theta;$$

$$K = \int_0^{\pi/2} \left| (1-x)^2 + 3x(x+2)\cos^2\theta \right|^{1/2} \sin\theta d\theta.$$

Покажем, что при $x \neq 0$ имеет место неравенство $K > 1$. Если $\cos\theta \neq 0, \pm 1$, то справедливо строгое неравенство

$$((1-x)^2 + mx(mx-2x+2)\cos^2\theta)^{1/2} > 1-x + mx \cdot \cos^2\theta.$$

Значит,

$$K > \frac{1-x}{\omega_m} \int_{S^{m-1}} d\sigma + \frac{mx}{\omega_m} \int_{S^{m-1}} \cos^2\theta d\sigma = 1-x + \frac{mx}{\omega_m} \int_{S^{m-1}} \cos^2\theta d\sigma = 1.$$

Теорема доказана.

Николаевский вычислительный центр

Գ. Ի. ԿՐԵՍԻՆ, Վ. Գ. ՄԱՋՅԱ

Մախիմովի սկզբունքը Համերի և Ստոկսի համակարգերի համար
կիսատարածության մեջ

Դիտարկվում է առաջին եզրային խնդիրը m -չափանի Համերի և Ստոկսի
համակարգերի համար կիսատարածության մեջ: Գտնված է հաստատունի
ճշգրիտ արժեքը

$$|u(x)| \leq K \|u\|_{x_m=0} C(R^{m-1})$$

անհավասարության մեջ, որտեղ՝ u — տեղափոխության կամ արագության վեկ-
տորն է, $x \in R_+^m$.

Գտնված հաստատունի արժեքն է

$$K = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)} \int_0^{\pi/2} \left((1-x)^2 + mx(mx-2x+2)\cos^2\theta \right)^{1/2} \sin^{m-2}\theta d\theta,$$

որտեղ՝ $x = (\lambda + \mu)(\lambda + 3\mu)^{-1}$, $x = 1$ համապատասխանաբար λ և μ լամբի և Ստոկսի համակարգերի համար: Մասնավորապես, Ստոկսի համակարգերի համար

$K = \frac{4}{\pi}$, երբ $m = 2$ և $K = \frac{3}{2}$, երբ $m = 3$: Եռաչափ տարածություն մեջ λ և

μ լամբի համակարգի համար

$$K = \frac{1}{2} \left(1 + 2x + \frac{(1-x)^2}{\sqrt{3x(x+2)}} \log \frac{1+2x+\sqrt{3x(x+2)}}{1-x} \right).$$

Հոդվածում ապացուցվում է, որ $K > 1$, այսինքն λ և μ լամբի և Ստոկսի համակարգերի համար տեղի չունի դասական մաքսիմումի սկզբունքը:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ S. Agmon, I. Comm. Pure Appl. Math., vol. 10, 179—239 (1957). ² C. Miranda, Ann. Mat. Pura Appl., Ser. 4, vol. 46, 265—311 (1958). ³ Б. В. Шульце, Сиб. мат. журн., т. 16, № 2 (1975). ⁴ В. Д. Купрадзе, Т. Г. Гегелиа, М. О. Бошелейшвили и др. Трёхмерные задачи математической теории упругости и термоупругости, Наука, М., 1976. ⁵ О. А. Ладыженская, Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. Наука, М., 1970.