ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXII 1981 4

УДК 519.2

МАТЕМАТИКА

С. Т. Мкртчян

Оценка близости распределений, имеющих совпадающие средние значения порядковых статистик

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 2/VII 1980)

Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — независимые случайные величины с общей функцией распределения (ф. р.) $F(x)$, а $X_{1;n} \leqslant X_{2;n} \leqslant \ldots \leqslant X_{n;n}$ — соответствующие порядковые статистики. Допустим, что $\{k(l): l = 1,2,\ldots\}$ — последовательность целых чисел, для которой $1 \leqslant k(l) \leqslant l$. В работах [1-6] исследован вопрос о восстановлении ф. р. по последовательности чисел

$$\{E(X_{k(n):n}): n = m, m+1, \ldots\} \tag{1}$$

при некоторых предположениях относительно вида последовательности $\{k(l): l = 1, 2\ldots\}$. В статьях [1,2] доказано, что при $k(n) = 1$ или $k(n) = n$ и $E|X_1| < \infty$ ф. р. $F(x)$ восстанавливается по последовательности (1) при $m = 1$ единственным образом. В работе [3] аналогичный результат доказан для случая $k(n) = k = \text{const}$. Наиболее общий результат получен в работах [5,6]. Для того, чтобы сформулировать его, нам понадобится

Определение (см. [5]). Скажем, что последовательность $\{k(l)\}$ удовлетворяет $(A-m)$-условию, если

$$k(m) \leqslant k(l) \leqslant k(m) + l - m$$

при всех $l \geqslant m$.

По определению любая последовательность $\{k(l)\}$ удовлетворяет $(A-1)$-условию.

Основной результат работы [5] состоит в том, что если последовательность $\{k(l)\}$ удовлетворяет $(A-m)$-условию и $E|X_{k(m);m}| < \infty$, то ф. р. $F(x)$ восстанавливается по последовательности (1) средних значений порядковых статистик единственным образом. В работе [6] при дополнительном условии $E|X_1| < \infty$ несколько ослаблено $(A-m)$-условие.

Ниже мы изучим вопрос о том, насколько конечный отрезок

$$\{E(X_{k(n):n}):\ n=m,\ m+1,\ \ldots,\ m+s\}$$

последовательности (1) определяет ф. р. $F(x)$. Точнее, если $F_1(x)$ и $F_2(x)$— две ф. р., для которых соответствующие средние значения порядковых статистик $X_{k(n):n}$ совпадают, т. е.

$$E_1(X_{k(n):n})=E_2(X_{k(n):n})$$

при $n=m,\ m+1,\ \ldots,\ m+s$, то нас интересует, насколько $F_1(x)$ отличается (в некоторой метрике) от $F_2(x)$.

Пусть $\{k(l)\}$—некоторая фиксированная последовательность, удовлетворяющая $(A-m)$-условию. Для каждой ф. р. F определим обратную функцию F^{-1}, положив

$$F^{-1}(y)=\inf\{x: F(x)\geqslant y\},\ 0<y<1$$

(см., например, ([7])). Введем класс $\mathbf{F}$ функций распределения, удовлетворяющих условиям:

1) для любой ф. р. $F\in\mathbf{F}$, любого $\varepsilon>0$ и любого $t\in(0,1)$

$$\sup_{|x|\leqslant\varepsilon}|F^{-1}(x+t)-F^{-1}(t)|\leqslant\rho_1(t;\varepsilon),$$

где $\rho_1(t;\varepsilon)\geqslant0$—некоторая заданная (фиксированная для $\mathbf{F}$) функция;

2) для любой ф. р. $F\in\mathbf{F}$ конечна величина

$$\gamma(m;F)=E|X_{k(m):m}|;$$

3) для любой ф.р. $F\in\mathbf{F}$ при всех $t\in(0,1)$ справедливо

$$|F^{-1}(t)|\leqslant L(t),$$

где $L(t)$ заданная и фиксированная для $\mathbf{F}$ функция.

Положим

$$\rho(t;\ \varepsilon;\ m)=\rho_1(t;\ \varepsilon)+(m-1)\ L(t).$$

Теорема. *Пусть последовательность $\{k(l)\}$ удовлетворяет $(A-m)$-условию. Если $F_1\in\mathbf{F}$ и $F_2\in\mathbf{F}$—две ф. р., для которых*

$$E_1(X_{k(n):n})=E_2(X_{k(n):n}) \tag{2}$$

при $n=m,\ m+1,\ \ldots,\ m+s\ (s\geqslant1)$, то для любого $\delta\in(0,1)$ и любого $y\in(0,1)$ справедливо неравенство

$$y^{k(m)-1}(1-y)^{m-k(m)}|F_1^{-1}(y)-F_2^{-1}(y)|\leqslant$$
$$\leqslant C\left[\frac{(k(m)-1)!(m-k(m))!}{m!}(\gamma(m;F_1)+\gamma(m;F_2))\frac{1}{\delta^3}\cdot\frac{1}{\sqrt{s}}+\rho(y;\delta;m)\right], \tag{3}$$

где C—абсолютная постоянная.

Доказательство. Легко убедиться, что (2) эквивалентно соотношению

$$\int_0^1 F_1^{-1}(y)y^{k(n)-1}(1-y)^{n-k(n)}dy=\int_0^1 F_2^{-1}(y)y^{k(n)-1}(1-y)^{n-k(n)} \tag{4}$$

при $n=m, m+1, \ldots, m+s$.

Положим

$$g_r(y)=F_r^{-1}(y)y^{k(m)}(1-y)^{m-k(m)},\quad r=1,\ 2,$$

$$p_j(y)=y^{k(m+j)-k(m)}(1-y)^{j-k(m+j)+k(m)},\quad j=0,\ 1,\ldots.$$

Тогда (4) принимает вид

$$\int_0^1 g_1(y)p_j(y)dy=\int_0^1 g_2(y)p_j(y)dy,\quad j=0,\ 1,\ldots,\ s.$$

Так как последовательность $\{k(n)\}$ удовлетворяет $(A-m)$-условию, то $p_j(y)$—полином от y степени j, а это значит, что предыдущее соотношение может быть записано в виде

$$\int_0^1 g_1(y)y^j dy=\int_0^1 g_2(y)y^j dy,\quad j=0,\ 1,\ldots,\ s. \tag{5}$$

Положим

$$\varphi_r(t)=\int_0^1 g_r(y)e^{ity}dy,\quad r=1,\ 2.$$

Тогда условия (5) означают, что

$$\varphi_1^{(j)}(0)=\varphi_2^{(j)}(0),\quad j=0,\ 1,\ldots,\ s. \tag{6}$$

Так как

$$\varphi_1(t)-\varphi_2(t)=\sum_{j=0}^{s}\frac{\varphi_1^{(j)}(0)-\varphi_2^{(j)}(0)}{j!}\cdot t^j+\frac{\varphi_1^{(s+1)}(\tau)-\varphi_2^{(s+1)}(\tau)}{(s+1)!}\cdot t^{s+1},$$

где $|\tau|\leqslant|t|$, то, учитывая (6), получим:

$$|\varphi_1(t)-\varphi_2(t)|\leqslant\frac{|\varphi_1^{(s+1)}(\tau)|+\varphi_2^{(s+1)}(\tau)|}{(s+1)!}|t|^{s+1}. \tag{7}$$

Но

$$|\varphi_r^{(s+1)}(\tau)|=\left|\int_0^1 g_r(y)e^{i\tau y}(iy)^{s+1}dy\right|\leqslant\int_0^1|g_r(y)|dy=$$

$$=\int_0^1|F_r^{-1}(y)|y^{k(m)-1}(1-y)^{m-k(m)}dy=$$

$$=\frac{(k(m)-1)!(m-k(m))!}{m!}\cdot\gamma(m;F_r),\quad r=1,\ 2,$$

поэтому из (7) находим:

$$|\varphi_1(t)-\varphi_2(t)| \leqslant \frac{(k(m)-1)!(m-k(m))!}{m!}\left[\gamma(m;F_1)+\gamma(m;F_2)\right]\cdot\frac{|t|^{s+1}}{(s+1)!}. \qquad (8)$$

Аналогичные рассуждения приводят нас к неравенству

$$|\varphi_1'(t)-\varphi_2'(t)| \leqslant \frac{(k(m)-1)!(m-k(m))!}{m!}\left[\gamma(m;F_1)+\gamma(m;F_2)\right]\cdot\frac{|t|^{s}}{s!}. \qquad (9)$$

Рассмотрим функцию

$$\omega_\delta(z)=\begin{cases}\dfrac{c}{\delta}\exp\{(z/\delta)^2/[(z/\delta)^2-1]\} & \text{при } |z|<\delta,\\ 0 & \text{при } |z|\geqslant\delta,\end{cases}$$

где $c=1\Big/\int\limits_{-1}^{1}\exp\{z^2/(z^2-1)\}\,dz.$

Ясно, что $\omega_\delta(z)\geqslant 0$, $\omega_\delta(z)=0$ при $|z|\geqslant\delta$, $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\omega_\delta(z)\,dz=1$ и $\omega_\delta(z)$ — бесконечно дифференцируемая функция.

Доопределим $g_r(z)$ $(r=1,\,2)$ на всю вещественную ось, положив $g_r(z)=0$ при $z\notin[0,\,1]$, и положим

$$g_r(z;\delta)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}g_r(y)\,\omega_\delta(y-z)\,dy,\quad r=1,\,2.$$

Ясно, что $g_r(z;\delta)$ — бесконечно дифференцируема по z, причем

$$|g_r(z;\delta)-g_r(z)|\leqslant\int\limits_{-\infty}^{\infty}|g_r(y)-g_r(z)|\,\omega_\delta(y-z)\,dy=$$

$$=\int\limits_{-\delta}^{\delta}|g_r(z+\zeta)-g_r(\zeta)|\,\omega_\delta(\zeta)\,d\zeta\leqslant\sup_{|\zeta|\leqslant\delta}|g_r(z+\zeta)-g_r(z)|. \qquad (10)$$

Положим теперь

$$\varphi_r(t;\delta)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}g_r(z;\delta)\,e^{itz}\,dz=\varphi_r(t)\cdot\chi_\delta(t), \qquad (11)$$

где

$$\chi_\delta(t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\omega_\delta(z)\,e^{itz}\,dz.$$

Пусть $A(z)$ — функция ограниченной вариации на вещественной прямой и

$$a(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{itz}dA(z).$$

Хорошо известно (см., например, ([6]), стр. 26), что если $a(t)$ абсолютно непрерывна на R^1 и $a(t)$, $a'(t)$ интегрируемы с квадратом, то

$$\operatorname{Var}(A)\leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\int_{-\infty}^{\infty}|a(t)|^2dt+\int_{-\infty}^{\infty}|a'(t)|^2\,dt\right)^{1/2}. \tag{12}$$

Положим

$$A(z)=g_1(z;\ \delta)-g_2(z;\ \delta).$$

Тогда

$$a(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{itz}\frac{d}{dz}(g_1(z;\ \delta)-g_2(z;\ \delta)dz=t(\varphi_1(t)-\varphi_2(t))\chi_\delta(t). \tag{13}$$

Отсюда и из соотношений (8) и (11) ясно, что

$$|a(t)|\leqslant\frac{(k(m)-1)!(m-k(m))!}{m!}[\gamma(m;F_1)+\gamma(m;F_2)]\cdot\frac{|t|^{s+2}}{(s+1)!}\cdot|\chi_\delta(t)|. \tag{14}$$

Кроме того, из (9) и (11) находим:

$$|a'(t)|\leqslant\frac{(k(m)-1)!(m-k(m))!}{m!}[\gamma(m;\ F_1)+\gamma(m;\ F_2)]\times$$

$$\times\left[2\frac{|t|^{s+1}}{s!}|\chi_\delta(t)|+\frac{|t|^{s+2}}{(s+1)!}|\chi_\delta'(t)|\right] \tag{15}$$

С другой стороны,

$$|\varphi_1(t;\delta)-\varphi_2(t,\delta)|\leqslant\int_{-\infty}^{\infty}|g_1(z;\delta)-g_2(z;\delta)|dz\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{r=1}^{2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|g_r(y)|\omega_\delta(y-z)dydz=\sum_{r=1}^{2}\int_{-\infty}^{\infty}|g_r(y)|dy= \tag{16}$$

$$=\frac{(k(m)-1)!(m-k(m))!}{m!}[\gamma(m;\ F_1)+\gamma(m;\ F_2)]$$

и аналогично

$$\left|\frac{d}{dt}(\varphi_1(t;\delta)-\varphi_2(t;\delta)\right|\leqslant\frac{(k(m)-1)!(m-k(m))!}{m!}\times$$
$$\times[\gamma(m;F_1)+\gamma(m;F_2)]\cdot\frac{C}{\delta}. \tag{17}$$

Здесь и ниже через C будут обозначаться абсолютные постоянные (не обязательно одни и те же). Легко видеть, что для функции $\chi_\delta(t)$ справедливы неравенства

$$|\chi_\delta(t)|\leqslant\frac{C}{\delta^3\max(1,|t|^2)},\quad|\chi_\delta'(t)|\leqslant\frac{C}{\delta^2\max(1,|t|^2)}. \tag{18}$$

Оценим теперь $\int\limits_{-\infty}^{\infty}|a(t)|^2dt$ и $\int\limits_{-\infty}^{\infty}|a'(t)|^2dt$.

Для любого $T>1$ с учетом (13), (14), (16) и (18) имеем

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}|a(t)|^2dt=\int\limits_{-T}^{T}|a(t)|^2dt+\int\limits_{|t|\geqslant T}|a(t)|^2dt\leqslant\left[\frac{(k(m)-1)!(m-k(m))!}{m!}(\gamma(m;F_1)+\right.$$
$$\left.+\gamma(m;F_2))\right]^2\cdot\left\{\left(\frac{1}{(s+1)!}\right)^2\cdot\int\limits_{-T}^{T}|t|^{2s+2}dt+2\int\limits_{T}^{\infty}|t\chi_\delta(t)|^2dt\right\}\leqslant$$
$$\leqslant\left[\frac{(k(m)-1)!(m-k(m))!}{m!}\cdot(\gamma(m;F_1)+\gamma(m;F_2))\right]^2\cdot \tag{19}$$
$$\cdot\left\{\left(\frac{1}{(s+1)!}\right)^2\frac{T^{2s+5}}{2s+5}+\frac{C}{\delta^6T}\right\}.$$

Аналогичным образом с учетом (13), (15), (17) и (18) найдем

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}|a'(t)|^2dt\leqslant\left[\frac{(k(m)-1)!(m-k(m))!}{m!}(\gamma(m;F_1)+\gamma(m;F_2))\right]^2\cdot$$
$$\cdot\left\{\left(\frac{1}{s!}\right)^2\frac{T^{2s+3}}{2s+3}+\frac{1}{\delta^2((s+1)!)^2}\cdot\frac{T^{2s+5}}{2s+5}+\frac{C}{\delta^6T}\right\}. \tag{20}$$

Оценки (19) и (20) с учетом неравенства (12) приводят нас к

$$|g_1(z;\delta)-g_2(z;\delta)|\leqslant\operatorname{Var}A(z)\leqslant C\frac{(k(m)-1)!(m-k(m))!}{m!}\times$$

$$\times(\gamma(m;F_1)+\gamma(m;F_2))\cdot\frac{1}{\delta}\left[\left(\frac{1}{s!}\right)^2\frac{T^{2s+5}}{2s+5}+\frac{1}{\delta^4 T}\right]^2 \tag{21}$$

Выбирая $T=C\delta^{-\frac{2}{s+3}}(s!)^{\frac{1}{s+3}}$, из (21) легко найдем

$$|g_1(z;\delta)-g_2(z;\delta)|\leqslant C\cdot\frac{(k(m)-1)!(m-k(m))!}{m!}\times \tag{22}$$

$$\times(\gamma(m;F_1)+\gamma(m;F_2))\frac{1}{\delta^3}\cdot\frac{1}{\sqrt{s}}.$$

Неравенства (22) и (10) показывают, что

$$|g_1(z)-g_2(z)|\leqslant C\frac{(k(m)-1)!(m-k(m))!}{m!}(\gamma(m;F_1)+\gamma(m;F_2))\times \tag{23}$$

$$\times\frac{1}{\delta^3\sqrt{s}}+\sup_{|\zeta|\leqslant\delta}|g_1(z+\zeta)-g_1(z)|+\sup_{|\zeta|\leqslant\delta}|g_2(z+\zeta)-g_2(z)|.$$

Без особого труда можно убедиться, что

$$\sup_{|\zeta|\leqslant\delta}|g_r(z+\zeta)-g_r(z)|\leqslant\rho(z;\delta,m),\quad r=1,2.$$

Подставив последнее неравенство в (23), получим требуемое неравенство (3).

Ереванский институт
народного хозяйства

Ս. Ք. ՄԿՐՏՉՅԱՆ

Կարգային վիճակագրությունների համընկնող միջին արժեքներ ունեցող բաշխումների մոտիկության գնահատականը

Դիցուք ունենք F_1 և F_2 բաշխումները, որոնց համար միջին արժեքների համապատասխան հաջորդականությունների վերջավոր հատվածները համընկնում են։ Աշխատանքում տրված է այդպիսի բաշխումների մոտիկության գնահատական։ Այս գնահատականից՝ սահմանում, ստացվում է Խուանգի արդյունքը։ Մյուս կողմից այդ գնահատականով կարելի է հետազոտել F_1-ի F_2-ին ձգտելու արագությունը։ Հետևաբար գնահատականը կարող է կիրառվել բնութագրական խնդիրներում կայունություն հետազոտելիս։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *L. K. Chan*, Amer. Math Monthly, vol. 74, 950—951 (1967). [2] *A. G. Konheim*, Amer. Math. Monthly, vol. 78, 524 (1971). [3] *Y. H. Wang*, Tech. Report No 71—10, Division of Statistics, The Ohio State Univ., 1971. [4] *M. Pollak*, Ann. of Statist., vol. 1, 180—182 (1973). [5] *J. S. Huang*, Ann. Inst. Statist. Math., vol. 27, 87—93 (1975). [6] *J. S. Huang, J. S. Hwang*, Statistical Distribution in Scientific Work, Dordrecht, Holland, 1975. [7] *Я. Гаек, З. Шидак*, Теория ранговых критериев, Наука, М., 1971. [8] *И. А. Ибрагимов, Ю. В. Линник*, Независимые и стационарно связанные величины, Наука, М., 1965.