ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXII 1981 3

УДК 517.548.2

МАТЕМАТИКА

А. А. Вагаршакян

Теорема единственности для квазиконформных отображений

(Представлено академиком АН Армянской ССР С. Н. Мергеляном 12/XI 1980)

Пусть $f(z)$, $\operatorname{Re} z>0$ — дифференцируемая функция и допускает непрерывное продолжение на $\{z;\ \operatorname{Re} z\geq 0\}$. Мы скажем, что $f(z)$ является K-квазиконформным отображением, если она удовлетворяет уравнению Бельтрами

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}=\varkappa(z)\ \frac{\partial f}{\partial z}, \tag{1}$$

где $\varkappa(z)$ — измеримая функция и

$$|\varkappa(z)|\leq\frac{K+1}{K-1},\quad \operatorname{Re} z>0.$$

Множество $E\subseteq\{z;\ \operatorname{Re} z=0\}$ называется множеством единственности для K-квазиконформных отображений, если любая функция $f(z)$, удовлетворяющая уравнению (1) и обращающаяся в нуль на множестве E, тождественно равняется нулю. Семейство таких множеств мы обозначим через $U(K)$.

В настоящей статье мы приводим достаточное условие на замкнутое множество $E\subseteq\{z;\ \operatorname{Re} z=0\}$, при котором оно принадлежит $U(K)$. Приводятся также некоторые необходимые условия на $E\in U(K)$

1. Хорошо известно [1], что если $f(z)$ — ограниченная функция, удовлетворяющая уравнению Бельтрами (1), то она допускает представление

$$f(z)=g(\varphi(z)), \tag{3}$$

где $g(w)$ — ограниченная аналитическая функция, а $\varphi(z)$ — K-квазиконформное и гомеоморфное отображение правой полуплоскости на себя. Через $h(t)$ обозначим следующую функцию:

$$h(t)=-i\varphi(it),\ -\infty<t<\infty.$$

Функция $h(t)$ удовлетворяет неравенствам [1]

$$\frac{1}{\lambda(K)} \leqslant \frac{h(x+t)-h(x)}{h(x)-h(x-t)} \leqslant \lambda(K), \quad -\infty < x,\ t < \infty, \tag{3}$$

где

$$\lambda(K) = \frac{1}{\left(\mu^{-1}\left(\frac{\pi K}{2}\right)\right)^2} - 1,$$

причем $\mu^{-1}(x)$ — обратная функция для

$$\mu(t) = \frac{T}{2} \frac{\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-x^2+t^2x^2)}}}{\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-t^2x^2)}}}.$$

Приведенное значение для $\lambda(K)$ уточнить нельзя ([1]), однако существуют более простые оценки, например

$$\lambda(K) < \frac{e^{\pi K}}{16}.$$

Каждая монотонная функция $h(x)$ порождает меру на $(-\infty, \infty)$, которую мы обозначим через μ_h. Легко заметить, что из представления (2) следует, что $E \notin U(k)$, если $\mu_h(E) > 0$ для любой функции $h(x)$, удовлетворяющей неравенствам (3).

Приведем некоторые обозначения и результаты о квазиконформных отображениях, которые будут применяться в дальнейшем. Для любой точки x и любого множества E положим

$$\rho(x, E) = \inf_{y \in E} |x-y|,$$

где $|x-y|$ — расстояние точек x и y. Длину интервала $\Delta = \{x;\ a < x < b\}$ обозначим через $|\Delta|$.

Пусть $h(x)$ — монотонная функция, удовлетворяющая неравенствам:

$$\frac{1}{M} \leqslant \frac{h(x+t)-h(x)}{h(x)-h(x-t)} \leqslant M, \quad -\infty < x,\ t < \infty.$$

Тогда существует (см. ([2]), стр. 69) M^2-квазиконформное отображение $\varphi(z)$ правой полуплоскости на себя такое, что $\varphi(ix) = ih(x)$.

2. Основным результатом настоящей статьи является следующая

Теорема. *Пусть $f(z)$ — непрерывная на* $\operatorname{Re} z \geqslant 0$, *$K$ — квазиконформное отображение, а E — замкнутое множество, лежащее на мнимой оси. Предположим, что существует интервал $\Delta \subset \{z;\ \operatorname{Re} z = 0\}$ такой, что*

$$\int\limits_{\Delta \setminus E} \frac{dx}{\rho^{1-\sigma}(x, E)} < \frac{|\Delta|^{\sigma}}{12},$$

где $2^{\sigma}=\frac{\lambda(K)+1}{\lambda(K)}$.

Если $f(z)$ обращается в нуль на множестве E, то она тождественно равна нулю.

Доказательство. Достаточно доказать, что для любой функции $h(x)$, которая удовлетворяет неравенствам (3), $\mu_h(E)>0$.

Сначала докажем некоторые неравенства для функции $h(x)$. Пусть x и δ—положительные числа, причем $\delta<x$. Тогда

$$h(x+\delta)-h(x)\leqslant\lambda(h(x)-h(x-\delta)),$$

где $\lambda=\lambda(K)$. Так как $h(0)\leqslant h(x-\delta)$, то

$$h(x+\delta)-h(x)\leqslant\lambda(h(x)-h(0)).$$

Если $3\delta<x$, то

$$h(x+\delta)-h(x-\delta)\leqslant\lambda(h(x-\delta)-h(x-3\delta)),$$

или

$$h(0)\leqslant h(x-3\delta)\leqslant\frac{(\lambda+1)h(x-\delta)-h(x+\delta))}{\lambda}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{(\lambda+1)^2h(x)-(2\lambda+1)h(x+\delta)}{\lambda^2}=\frac{\lambda^2h(x)-(2\lambda+1)(h(x+\delta)-h(x))}{\lambda^2}.$$

Таким образом, при $3\delta<x$ имеет место неравенство

$$h(x+\delta)-h(x)\leqslant\frac{\lambda^2}{2\lambda+1}(h(x)-h(0)).$$

Если для некоторого натурального n имеет место неравенство $(2^n-1)\delta<x$, то

$$h(x+\delta)-h(x)\leqslant\frac{\lambda^n}{(\lambda+1)^n-\lambda^n}(h(x)-h(0)).\tag{4}$$

Действительно, пусть $(2^{n+1}-1)\delta<x$ и имеет место неравенство (4). Из неравенства (3), где вместо x написано $x+\delta-2^n\delta$, а вместо t, $2^n\delta$, имеем

$$h(x+\delta)-h(x+\delta-2^n\delta)\leqslant\lambda(h(x+\delta-2^n\delta)-h(x+\delta-2^{n+1}\delta)).$$

Поэтому

$$h(0)\leqslant h(x+\delta-2^n\delta)\leqslant\frac{1}{\lambda}((\lambda+1)h(x+\delta-2^n\delta)-h(x+\delta))\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{\lambda}\left(\frac{\lambda+1}{\lambda}\left((\lambda+1)h(x+\delta-2^{n-1}\delta)-h(x+\delta)\right)-h(x+\delta)\right)=$$

$$=\frac{1}{\lambda^2}\left((\lambda+1)^2h(x+\delta-2^{n-1}\delta)-(2\lambda+1)h(x+\delta)\right)\leqslant\ldots\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{\lambda^{n+1}}\left((\lambda+1)^{n+1}h(x)-((\lambda+1)^{n+1}-\lambda^{n+1})h(x+\delta)\right)=$$

$$=\frac{1}{\lambda^{n+1}}\left(\lambda^{n+1}h(x)-((\lambda+1)^{n+1}-\lambda^{n+1})(h(x+\delta)-h(x))\right).$$

Следовательно

$$h(x+\delta)-h(x)\leqslant\frac{\lambda^{n+1}}{(\lambda+1)^{n+1}-\lambda^{n+1}}(h(x)-h(0)).$$

Аналогичными рассуждениями можно доказать, что если $(2^n-1)\delta\leqslant x$, то

$$h(\delta)-h(0)\leqslant\frac{\lambda^n}{(\lambda+1)^n-\lambda^n}(h(x+\delta)-h(\delta)).\tag{5}$$

Пусть Δ_1 и Δ_2—два интервала, которые не пересекаются и имеют общую граничную точку. Из полученных нами неравенств (4) и (5) следует, что

$$\mu_h(\Delta_1)\leqslant\frac{\lambda^n}{(\lambda+1)^n-\lambda^n}\mu_h(\Delta_2),\tag{6}$$

если $(2^n-1)|\Delta_1|\leqslant|\Delta_2|$. В частности, неравенство имеет место при $n=\left[\log_2\left(1+\frac{|\Delta_2|}{|\Delta_1|}\right)\right]$, гда $[a]$ целая часть числа a. Поэтому

$$\mu_h(\Delta_1)\leqslant\frac{\mu_h(\Delta_2)}{\left(\frac{\lambda+1}{\lambda}\right)^{\left[\log_2\left(1+\frac{|\Delta_2|}{|\Delta_1|}\right)\right]}-1}\leqslant\frac{\mu_h(\Delta_2)}{\left(\frac{\lambda+1}{\lambda}\right)^{\log_2\left(1+\frac{|\Delta_2|}{|\Delta_1|}\right)-1}-1}.$$

Заметим, что если $|\Delta_1|\leqslant\lambda|\Delta_2|\log_2\frac{\lambda+1}{\lambda}$, то

$$\mu_h(\Delta_1)\leqslant\frac{\lambda+1}{\lambda}\left(\frac{\lambda}{\lambda+1}\right)^{\log_2\frac{|\Delta_2|}{|\Delta_1|}}\mu_h(\Delta_2)=\frac{\lambda+1}{\lambda}\left(\frac{|\Delta_1|}{|\Delta_2|}\right)^{\log_2\frac{\lambda+1}{\lambda}}\mu_h(\Delta_2)=$$

$$=2^\sigma\left(\frac{|\Delta_1|}{|\Delta_2|}\right)^\sigma\mu_h(\Delta_2).$$

Теперь рассмотрим открытое множество $\Delta\setminus E$. Пусть Δ_j, $j=1, 2, \ldots$ составляющие интервалы множества $\Delta\setminus E$. Предположим, что для любого j имеет место неравенство

$$|\Delta_j|\leqslant\frac{\lambda}{2}|\Delta\setminus\Delta_j|\log_2\frac{\lambda+1}{\lambda}.\tag{7}$$

Через Δ_j' обозначим интервал наибольшей длины, содержащийся в $\Delta\setminus\Delta_j$. Заметим, что $2|\Delta_j'|\geqslant|\Delta\setminus\Delta_j|$. Мы доказали, что имеет место неравенство

$$\mu_h(\Delta_j)\leqslant2^\sigma\left(\frac{|\Delta_j|}{|\Delta_j'|}\right)^\sigma\mu_h(\Delta_j')\leqslant2^\sigma\left(\frac{2|\Delta_j|}{|\Delta\setminus\Delta_j|}\right)^\sigma\mu_h(\Delta_j')\leqslant$$

$$\leqslant2^\sigma\left(2+\frac{\sigma}{2^\sigma-1}\right)^\sigma\left(\frac{|\Delta_j|}{|\Delta|}\right)^\sigma\mu_h(\Delta).$$

Суммируя по j, получим:

$$\mu_h(\Delta\setminus E)=\sum_{j=1}^{\infty}\mu_h(\Delta_j)\leqslant\frac{2^{\sigma}}{|\Delta|^{\sigma}}\left(2+\frac{\sigma}{2^{\sigma}-1}\right)^{\sigma}\left(\sum_{j=1}^{\infty}|\Delta_j|^{\sigma}\right)\mu_h(\Delta).$$

Отсюда получим:

$$\mu_h(\Delta\setminus E)\left(1-2^{\sigma}\left(2+\frac{\sigma}{2^{\sigma}-1}\right)^{\sigma}\frac{\sum\limits_{j=1}^{\infty}|\Delta_j|^{\sigma}}{|\Delta|^{\sigma}}\right)\leqslant$$

$$\leqslant 2^{\sigma}\left(2+\frac{\sigma}{2^{\sigma}-1}\right)^{\sigma}\frac{\sum\limits_{j=1}^{\infty}|\Delta_j|^{\sigma}}{|\Delta|^{\sigma}}\mu_h(E).$$

Если бы имело место неравенство

$$\sum_{j=1}^{\infty}|\Delta_j|^{\sigma}<\frac{|\Delta|^{\sigma}}{2^{\sigma}\left(2+\frac{\sigma}{2^{\sigma}-1}\right)^{\sigma}},\tag{8}$$

то $\mu_h(E)=0$, так как в противном случае $\mu_h(\Delta\setminus E)=0$ и поэтому $\mu_h(\Delta)=0$.

Легко заметить, что

$$\int\limits_{\Delta_j}\frac{dx}{\rho^{1-\sigma}(x,\ E)}=\frac{2^{1-2\sigma}|\Delta_j|^{\sigma}}{\sigma}.$$

Следовательно, условие (8) можно записать в следующей форме:

$$\int\limits_{\Delta\setminus E}\frac{dx}{\rho^{1-\sigma}(x,\ E)}<\frac{2|\Delta|^{\sigma}}{2^{3\sigma}\left(2+\frac{\sigma}{2^{\sigma}-1}\right)^{\sigma}}.\tag{9}$$

Таким образом, мы доказали теорему, полагая, что Δ_j удовлетворяют неравенству (7), которое можно записать и в виде

$$|\Delta_j|\leqslant\frac{\lambda\log_2\frac{\lambda+1}{\lambda}}{2+\lambda\log_2\frac{\lambda+1}{\lambda}}\cdot\frac{|\Delta|}{2}=\frac{\sigma(2^{\sigma}-1)}{2^{\sigma+1}+\sigma-2}\cdot\frac{|\Delta|}{2},$$

или, что то же самое,

$$\rho(x,\ E)\leqslant\frac{\sigma(2^{\sigma}-1)}{2^{\sigma+1}+\sigma-2}|\Delta|,\quad x\in\Delta.\tag{10}$$

В общем случае неравенство (10) не имеет места, однако мы можем построить новое множество E', добавляя к множеству E конечное число точек так, чтобы имело место неравенство

$$\rho(x,\ E')\leqslant\frac{\sigma(2^{\sigma}-1)}{2^{\sigma+1}+\sigma-2}|\Delta|.$$

Остается проверить, что из условия теоремы, наложенного на множество E, следует неравенство (9), написанное для E'. Заметим, что E' можно было построить так, чтобы

$$\int\limits_{\Delta\setminus E'}\frac{dx}{\rho^{1-\sigma}(x,\ E')}\leqslant\int\limits_{\Delta\setminus E}\frac{dx}{\rho^{1-\sigma}(x,\ E)}+\left(\frac{2^{\sigma+1}+\sigma-2}{\sigma(2^{\sigma}-1)}\right)^{\sigma}\frac{|\Delta\setminus E|}{|\Delta|^{1-\sigma}}.$$

Далее имеем

$$\int\limits_{\Delta\setminus E}\frac{dx}{\rho^{1-\sigma}(x,\ E)}+\left(\frac{2^{\sigma+1}+\sigma-2}{\sigma(2^{\sigma}-1)}\right)^{\sigma}\frac{|\Delta\setminus E|}{|\Delta|^{1-\sigma}}\leqslant\left(1+\left(\frac{2^{\sigma+1}+\sigma-2}{\sigma(2^{\sigma}-1)}\right)^{\sigma}\right)\int\limits_{\Delta\setminus E}\frac{dx}{\rho^{1-\sigma}(x,\ E)}<$$

$$<4\int\limits_{\Delta\setminus E}\frac{dx}{\rho^{1-\sigma}(x,\ E)}<\frac{|\Delta|^{\sigma}}{3}<2^{1-3\sigma}\ \frac{|\Delta|^{\sigma}}{\left(2+\dfrac{\sigma}{2^{\sigma}-1}\right)^{\sigma}}.$$

Теорема доказана, так как $\mu_h(E)=\mu_h(E')$.

Замечание. Пусть замкнутое множество E не удовлетворяет условию теоремы. Тогда для любого интервала Δ имеет место неравенство

$$\int\limits_{\Delta\setminus E}\frac{dx}{\rho^{1-\sigma}(x,\ E)}\geqslant\frac{|\Delta|^{\sigma}}{12}. \qquad (11)$$

Если E такое множество, что имеет место также неравенство

$$\int\limits_{\Delta\setminus E}\frac{dx}{\rho^{1-\sigma}(x,\ E)}\leqslant\frac{\sqrt{K}}{12}|\Delta|^{\sigma}, \qquad (12)$$

то функция

$$h(t)=\int\limits_{(0,t)\setminus E}\frac{dx}{\rho^{1-\sigma}(x,\ E)}$$

удовлетворяет неравенствам

$$\frac{1}{\sqrt{K}}\leqslant\frac{h(x+t)-h(x)}{h(x)-h(x-t)}\leqslant\sqrt{K}.$$

В силу теоремы Альфорса и Бёрлинга, приведенной во введении настоящей статьи, существует K-квазиконформное отображение $\varphi(t)$ правой полуплоскости на себя такое, что $\varphi(ix)=ih(x)$, $-\infty<x<\infty$.

Пусть F—множество x, для которых существует точка $y\in E$ такая, что $h(y)=x$. Заметим, что мера Лебега замкнутого множества F равна нулю. Следовательно, существует аналитическая функция $g(z)\neq 0$, $\operatorname{Re} z>0$, непрерывная вплоть до границы и равная нулю на множестве F. Тогда $f(z)=g(\varphi(z))$ является K-квазиконформной и обращается в нуль на множестве E, причем $f\neq 0$.

Интересно заметить, что значение параметра σ в приведенных выше рассуждениях не играло никакой роли. В качестве σ в условиях (11) и (12) можно было брать любое число $0 < \sigma \leqslant 1$.

Институт математики
Академии наук Армянской ССР

Ա. Ա. ՎԱՂԱՐՇԱԿՅԱՆ

Միակության թեորեմա քվազիկոնֆորմ արտապատկերումների համար

Դիցուք $f(z)$-ը աջ կիսահարթության վրա որոշված դիֆերենցելի ֆունկցիա է և բավարարում է Բելտրամի հավասարմանը՝

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \varkappa(z) \frac{\partial f}{\partial z},$$

որտեղ $|\varkappa(z)| \leqslant \dfrac{K-1}{K+1}, \qquad K \geqslant 1:$

Ներկա հոդվածում ապացուցված է, որ եթե E-ն փակ բազմություն է, իսկ Δ-ն՝ ինտերվալ ընկած կեղծ առանցքի վրա այնպես, որ տեղի ունի հետևյալ անհավասարությունը՝

$$\int\limits_{\Delta \setminus E} \frac{dx}{\rho^{1-\sigma}(x, E)} < \frac{|\Delta|^{\sigma}}{12},$$

որտեղ $2^{\lambda} = \dfrac{\lambda+1}{\lambda}$, *$|\Delta|$-ն Δ-ի երկարությունն է, ապա Բելտրամի հավասարմանը բավարարող ֆունկցիան, որը զրո է դառնում E բազմության վրա նույնաբար հավասար է զրոյի: Այստեղ λ-ն հաստատուն է կախված միայն K-ից:*

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *O. Lehto, K. I. Virtanen,* Quasiconformal mappings in the plane, Berlin, Heidelberg, New-York, 1973. [2] *Л. Альфорс,* Лекции по квазиконформным отображениям, Мир, М., 1969.