ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXXI 1980 3

УДК 53.01.45+507+538

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

Академик АН Армянской ССР А. Г. Иосифьян

О плотности Действия* и векторных потенциалах электромагнитного поля

(Представлено 21 июля 1980 г.)

При анализе различных способов энергообмена в идеальном электромагнитном осцилляторе в рамках классической электродинамики [1] были установлены два основных закона электромагнитных явлений, математически представленных в максвелловско-лагранжевом пространстве обобщенных переменных:

а) закон ЭДС магнитоэлектрической индукции:

$$Э = -\frac{d\Phi}{dt} \quad [B] \tag{1}$$

б) закон МДС электромагнитной индукции (или по Фарадею вольта-электрической индукции):

$$H = -\frac{dQ}{dt'} \quad [A] \tag{2}$$

Система интегральных соотношений, эквивалентная (1) и (2), основанная на использовании векторных функций применительно к условиям абсолютного вакуума—эфира поля, *не зависящих от природы и свойств* вещественных электрических магнитных проводников и диэлектриков, в соответствии с математической классификацией физических величин Максвелла имеет вид:

$$\oint_{l_\Phi} \bar{E}\, d\bar{l} = -\frac{d}{dt} \int_{S_\Phi} \bar{B}\, d\bar{s} \quad [B]; \tag{3}$$

$$\oint_{l_Q} \bar{H}^* d\bar{l}^* = -\frac{d}{dt'} \int_{S_Q} \bar{D}^* d\bar{s}^* \quad [A]. \tag{4}$$

---

* Плотность Действия $\frac{дж \cdot c}{м^2}$

где S_Φ и S_Q определяют поверхности, натянутые на контуры Γ_Q и Γ^*_Φ, каждый в своей системе геометрического пространства (r, t), (r', t').

Интегральные соотношения (3) и (4) допускают свертывание в точку, каждое в своей системе отсчета, с учетом деформации контура, на основе теоремы Стокса:

$$\operatorname{rot} \overline{E} = -\frac{\partial \overline{B}}{\partial t} - \operatorname{rot} [\overline{B} \times \overline{u}_\Phi] \qquad \left| \frac{B}{м^2} \right|; \tag{5}$$

$$\operatorname{rot} \overline{H}^* = -\frac{\partial \overline{D}^*}{\partial t'} - \operatorname{rot} [\overline{D}^* \times \overline{u}_Q] \qquad \left| \frac{A}{м^2} \right| \tag{6}$$

Если ввести в (5) вектор электродинамического импульса (по Максвеллу)

$$\overline{A} = \int_0^t \overline{E}\, dt \left(\text{в отличие от } \overline{A}' = \mu \int \frac{j\, dV}{r},\ \overline{H} = \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \overline{A} \right)$$

и своеобразное полевое „магнитоэлектрическое динамо" связи индукции $\overline{B}$ с $\overline{A}$, $\overline{B} = \operatorname{rot} \overline{A}$, отражающее *вихревое состояние поля* и допускающее согласно (3) формулировку закона сохранения магнитного потокосцепления по Максвеллу ([2])

$$\oint_{\Gamma_\Phi} \overline{A}\, d\overline{l} = \int_{S_\Phi} \overline{B}\, d\overline{s} = \text{const},$$

то напряженность электрического поля в точке в самом общем виде представляется в форме

$$\overline{E} = -\frac{\partial \overline{A}}{\partial t} - [\overline{B} \times \overline{u}_\Phi], \qquad \left| \frac{B}{м} \right| \tag{7}$$

а при наличии сингулярных точек (области) по контуру ЭДС в виде

$$\overline{E} = -\frac{\partial \overline{A}}{\partial t} - \operatorname{grad} \varphi_i - [\overline{B} \times \overline{u}_\Phi]. \tag{8}$$

Аналогично при введении электромагнитного импульса

$$\overline{K} = \int_0^t \overline{H}^*\, dt'$$

и соответственно „*электромагнитного динамо*" связи $\overline{D}^*$ с $\overline{K}$, $\overline{D}^* = \operatorname{rot} \overline{K}$, отражающего *вихревое состояние поля*, из (4) получаем формулировку закона сохранения электрического потокосцепления в форме

$$\oint_{\Gamma_Q} \overline{K} d\overline{l}^* + \int_{S_Q} \overline{D}^* d\overline{s}^* = \text{const}.$$

В общем виде $\overline{H}^*$ представляется в виде

$$\overline{H}^* = -\frac{d\overline{K}}{dt'} - [\overline{D}^* \times \overline{u}_Q], \quad \left|\frac{A}{м}\right|. \tag{9}$$

а при наличии сингулярных точек по контуру МДС в виде

$$\overline{H}^* = -\frac{\partial \overline{K}}{\partial t'} - \operatorname{grad} \varphi_m - [\overline{D}^* \times \overline{u}_Q]. \tag{10}$$

Уравнения (1) и (2), выражая основные законы электромагнитных явлений в лагранжевом пространстве обобщенных переменных для решения энергетических задач, дополняются двумя уравнениями обобщенных скоростей: тока $i(t)$ и напряжения $v(t)$ в форме:

$$i(t) = \frac{dq}{dt} \qquad [A]; \tag{11}$$

$$v(t') = \frac{d\Psi}{dt'} \qquad [B], \tag{12}$$

где q—обобщенная координата в пространстве магнитоэлектрической индукции—электрический заряд;

Ψ—обобщенная координата в пространстве электромагнитной индукции (вольтаэлектрической индукции по Фарадею)—(магнитный заряд).

Эквивалентная система интегральных соотношений (11, 12), основанная на использовании векторных функций с учетом гипотезы Максвелла о токах смещения и уравнениях напряжений для процессов немагнитоэлектрического происхождения, представляется в виде:

$$i(t) = \oint \overline{H} d\overline{l} = \int_{S_{пр.}} \overline{j}\, d\overline{s} + \frac{\partial}{\partial t} \int_{S_{см.}} \overline{D} d\overline{s} \qquad [A] \tag{13}$$

$$i(t) = I_{пр.} + I_{см.};$$

$$v(t') = \oint \overline{E}^* d\overline{l}^* = \oint_{S^*_{пр.}} \overline{\varkappa}\, d\overline{s}^* + \frac{\partial}{\partial t'} \int_{S^*_{см.}} \overline{B}^* d\overline{s}^* \qquad [B] \tag{14}$$

$$v(t') = V_{пр.} + V_{см.}$$

Интеграл (13) распространяется на сечение проводов, электролитов, плазмотронов с электронно-ионной проводимостью и сечение электродов емкости C. Интеграл (14) распространяется на сечение магнитопроводов или сечение магнитных листков, обладающих проводимостью флюксоидов, по поверхности натянутой на контур цепи.

Свертывая интегральные соотношения в точку, каждое в своей системе, имеем:

$$\mathrm{rot}\,\overline{H} = \overline{j}_{пр} + \frac{\partial \overline{D}}{\partial t} \quad \left|\frac{A}{м^2}\right|; \tag{15}$$

$$\mathrm{rot}\,\overline{E}^* = \overline{x} + \frac{\partial \overline{B}^*}{\partial t'} \quad \left|\frac{B}{м^2}\right|, \tag{16}$$

где $\overline{j}$ — плотность тока проводимости $\left|\frac{A}{м^2}\right|$;

$\overline{x}$ — плотность напряжения проводимости магнитного потока $\left|\frac{B}{м^2}\right|$;

$\frac{\partial \overline{D}}{\partial t}$ — плотность электрического тока смещения $\left|\frac{A}{м^2}\right|$;

$\frac{\partial \overline{B}^*}{\partial t'}$ — плотность электрического напряжения $\left|\frac{B}{м^2}\right|$ от изменяющегося магнитного потока самоиндукции.

В теоретической электротехнике согласно Хэвисайду плотность $x = -j_{маг.}$ называют плотностью „магнитного тока", включенную в уравнение Максвелла (5), что совершенно непоследовательно.

В уравнениях (3—6) векторные функции $\overline{A}$ и $\overline{K}$, характеризующие векторные потенциалы магнитного и электрического полей, интегрируются по замкнутым взаимно-ортогональным контурам $\oint_{\Gamma} dl$, $\oint_{\Gamma^*} dl^*$, образующим *двусвязное* пространство. Поэтому преобразование интегралов по площади от векторов индукции $\overline{B} = \mathrm{rot}\,\overline{A}$ и $\overline{D}^* = \mathrm{rot}\,\overline{K}$ в интегралы векторов-потенциалов по линейному контуру невозможно в одном математическом пространстве. Эта невозможность вытекает из теоремы Стокса о том, что циркуляция по замкнутому контуру, который не может сжатием обратиться в точку, не выходя из пределов области контура выделяющая односвязную область, равна сумме напряжений всех вихревых шнуров правой или левой циркуляций, проходящих внутри контура.

Поэтому, если в пространстве энергообмена Ф магнитоэлектрическая индукция $\overline{B}$ по магнитному потоку является вихревой, то вектор $\overline{D}$ по электрическому потоку не может быть вихревым, а должен быть потенциальным, и наоборот, если в электроиндукционном пространстве вектор $\overline{D}^*$ является вихревым, то тогда $\overline{B}^*$ должен быть потенциальным.

Введение потенциальных векторов физически связано с наличием источников для электрического поля.

$$\mathrm{div}\,\overline{D} = \rho_e\left(\frac{A \cdot c}{м^3}\right) \text{ при } \mathrm{div}\,\overline{j} + \frac{\partial \rho_e}{\partial t} = 0 \tag{17}$$

и для магнитного поля

$$\operatorname{div} \overline{B}^{*} = \rho_m \quad \left(\frac{B \cdot c}{м^3}\right) \quad \text{при} \quad \operatorname{div} \overline{x} + \frac{\partial \rho_m}{\partial t} = 0 \tag{18}$$

автоматически приводит к введению скалярных и векторных функций в форме:

$$\nabla^2 \varphi_e = \rho_e; \quad \nabla^2 \overline{A} = -\mu \overline{j};$$

$$\nabla^2 \varphi_m = \rho_m; \quad \nabla^2 \overline{K} = -\varepsilon \overline{x}.$$

Хотя математически использование двух контурных интегралов векторов-потенциалов в двусвязном пространстве правой и левой циркуляции не допускает применения теоремы Стокса, однако физически в самом общем случае такие вихревые процессы должны подчиняться законам сохранения энергии, электромагнитного импульса, сохранения Действия (энергия$\times$время) как интегральных в пространстве и времени характеристик с конечными стационарными значениями пространственно-временных параметров энергообмена в адиабатной оболочке.

Исследуя фарадеевы силовые линии магнитной индукции, Максвелл указывал ([2], стр. 58), что порождаемые замкнутым током линии индукции имеют форму замкнутых кривых, которые охватывают ток, как одно звено цепи другое.

Такая топология двух взаимосвязанных осей мощности—оси электрических сил (цепь тока) и оси магнитных сил (цепь магнитопроводников) как некоторых геометрических абстрактных кривых в свете концепций дискретных силовых электрических и магнитных линий ([3, 4]), вдоль которых мигрирует электромагнитная энергия от источника к потребителю, отражает наиболее приемлемую картину нелинейных электромагнитных явлений.

При таком анализе целесообразно двусвязное пространство вихревых образований, связанное с двумя пространствами—пространством магнитоэлектрической индукции и пространством электромагнитной индукции, математически представить в виде двух абстрактных геометрических контуров, взаимосвязанных как одно звено цепи с другим с сингулярными точками в каждом звене, в котором могут быть применены градиентные функции. Эти сингулярные точки могут быть в этом абстрактном пространстве областями ввода и вывода энергии и соответственно Действия с помощью образования *«петель»* (closed loops) электрических (Дж. Дж. Томсон, Дирак) ([3]) и магнитных (Миткевич) ([4]), как признаков нелинейных процессов.

Рассматривая вектор-потенциал магнитного поля $\overline{A}$ и вектор-потенциал электрического поля $\overline{K}$ как векторы циркуляции по контуру, в каждой точке которого *могут действовать* вектор плотности тока совместно с $\overline{A}$ и вектор плотности напряжения (магнитной плотности «тока») совместно с $\overline{K}$, можно заметить, что математически можно образовать скалярные произведения этой группы векторов и рассматривать их как плотность энергии

$$w_\Phi = \bar{j} \cdot \bar{A} \qquad [Дж/м^3]; \tag{19}$$

$$w_Q = \bar{\varkappa} \cdot \bar{K} \qquad [Дж/м^3]. \tag{20}$$

Если рассматривать некоторые объемы V_Φ и V_Q, образованные током $I = \int \bar{j}\, d\bar{s}$ при магнитном потоке $\Phi = \int \bar{A}\, d\bar{l}$ и $V = \int \bar{\varkappa}\, d\bar{l}^*$, образованные при электрическом потоке $Q = \int \bar{K} d(\bar{l}^*)$, то энергия может быть представлена в виде:

$$W_\Phi = \int\limits_{V_\Phi} \bar{j}\, \bar{A}\, d\,V, \quad [Дж];$$

$$W_Q = \int\limits_{V_Q} \bar{\varkappa}\, \bar{K}\, d\,V^* \quad [Дж].$$

Так как полная плотность тока $\bar{j} = \bar{j}_{пр} + \dfrac{\partial \bar{D}}{\partial t}$ и полная плотность напряжения („магнитного тока") $\bar{\varkappa} = \bar{\varkappa}_{пр} + \dfrac{\partial \bar{B}^*}{\partial t'}$, то математически энергия в соответствующих объемах может быть выражена в следующем виде:

$$W_\Phi = \int\limits_{V_\Phi} \left(\bar{i}_{пр} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t}\right) \bar{A}\, d\,V = \int\limits_{V_{пр.}} \bar{j}_{пр.} \bar{A}\, d\,V + \int\limits_{V_{см.}} \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \bar{A}\, d\,V, \quad [Дж]$$

$$W_Q = \int\limits_{V_Q} \left(\bar{\varkappa}_{пр} + \frac{\partial \bar{B}^*}{\partial t'}\right) \bar{K} d\,V^* = \int\limits_{V_{пр}} \bar{\varkappa}_{пр} \bar{K} d\,V^* + \int\limits_{V_{см}} \frac{\partial \bar{B}^*}{\partial t'} \bar{K}\, d\,V^* \quad [Дж].$$

Если выделить области потоков смещения $W^c_\Phi = \int \dfrac{\partial \bar{D}}{\partial t} \bar{A}\, d\,V$ и $W^c_Q = \int \dfrac{\partial \bar{B}^*}{\partial t'} \bar{K} d\,V^*$, характеризующие энергию, сосредоточенную в объеме этих потоков, и проинтегрировать W^c_Φ и W^c_Q по времени, полагая, что временные процессы в обеих системах отсчета происходят в одном и том же геометрическом пространстве $V_\Phi = V_Q = V$ и $W = W^c_\Phi + W^c_Q = 2W_0$ в одно и то же конечное время τ, то справедливо равенство $\left(\text{при условии } \dfrac{\partial \bar{A}}{\partial t} = 0 \quad \dfrac{\partial \bar{K}}{\partial t'} = 0\right)$

$$S = \int\limits_0^\tau W_0 dt = \frac{1}{2} \int\limits_V \left(\bar{D}\, \bar{A} + \bar{B}^* \bar{K}\right) d\,V = \int\limits_V \rho_s d\,V$$

$$\rho_s = \frac{1}{2}\left(\bar{D}\, \bar{A} + \bar{B}^* \bar{K}\right) \quad \left[\frac{Дж \cdot c}{м^3}\right] \tag{21}$$

выражающее плотность Действия (энергия$\times$время) в единице объема и основанное на использовании обоих векторов-потенциалов в одном и том же физическом пространстве. Полученная формула плотности Действия в уравнении (21) позволяет исследовать энергетические процессы излучения и поглощения в электромагнитных осцилляторах в случае наличия нелинейности.

В работе рассмотрены эквивалентные системы интегральных соотношений в пространствах магнитоэлектрической индукции и электромагнитной индукции, а также введены дифференциальные соотношения для двух векторов-потенциалов электрических и магнитных индукций, в которых векторы-потенциалы $\overline{A}$ и $\overline{K}$ определяются по методу Максвелла, как электродинамические импульсы, т. е. как 4-мерные векторные образования.

Введены понятия электромагнитного и магнитоэлектрического «динамо», отражающие физические особенности связи вихревых электрических и магнитных полей.

Введено абстрактное топологическое двусвязное звено в форме взаимосвязанных замкнутых геометрических контуров, сингулярные точки которого могут быть областями ввода и вывода энергии. Выведен параметр плотности Действия $\left[\frac{Дж \cdot с}{м^3}\right]$.

Автор выражает благодарность О. К. Давтяну и Г. Л. Арешяну за полезное обсуждение настоящей работы.

Всесоюзный научно-исследовательский
институт электромеханики

Հայկական ՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս Ա. Գ. ԻՈՍԻՖՅԱՆ

Էլեկտրամագնիսական դաշտի գործողության խտության և վեկտոր պոտենցիալների մասին

Աշխատանքում դիտարկված են մագնիսաէլեկտրական և էլեկտրամագնիսական ինդուկցիայի տարածությունների մեջ ինտեգրալային հարաբերությունների համարժեք սիստեմները։ Էլեկտրական և մագնիսական ինդուկցիայի երկու վեկտոր-պոտենցիալների համար մտցված են դիֆերենցիալ հարաբերակցություններ, որոնցում և վեկտոր-պոտենցիալները որոշվում են Մաքսվելի մեթոդով՝ որպես էլեկտրադինամիկ ազդանշաններ։

Մտցված է էլեկտրամագնիսական և մագնիսաէլեկտրական «դինամո»-ի հասկացողությունը, որոնք արտացոլում են մրրկային էլեկտրական և մագնիսական դաշտերի ֆիզիկական կապի առանձնահատկությունները։ Ստացված է գործողության խտության արտահայտությունը, օգտագործելով միևնույն ֆիզիկական տարածությունում գործող երկու վեկտոր-պոտենցիալները։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *А. Г. Иосифьян*, ДАН АрмССР, т. 57, № 4 (1978). [2] *Д. К. Максвелл*, Избранные сочинения по теории электромагнитного поля, ГИТТЛ, М., 1954. [3] *P. A. M. Dirac*, Scientific of Amer., May 1963, vol. 208, № 5. [4] *В. Ф. Миткевич*, Магнитный поток и его преобразование, М., Изд-во АН СССР, 1946