ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXVII 1979 1

УДК 517.55

МАТЕМАТИКА

Е. С. Мкртчян

Об одной формуле логарифмического вычета в C^n и ее приложении к изучению однолистных отображений.

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 22/IX 1978)

1°. Обобщение логарифмического вычета для функций одного комплексного переменного на функции многих комплексных переменных происходит в двух направлениях. Первое: меняется размерность области интегрирования (см. ([1]) там размерность меняется от n до $2n-1$) и второе: варьируется дифференциальная форма фигурирующая под интегралом (см. ([2]) подобно интегральной формуле Лере). В этой работе мы получаем формулу логарифмического вычета в случае, когда область интегрирования имеет размерность $2n$ в C^n.

С помощью этой формулы для одного класса однолистных отображений получено необходимое условие однолистности и оценки для коэффициентов.

2. Пусть в области $G\subset C^n$ задана система n голоморфных функций (голоморфное отображение)

$$w_j=f_j(z_1,\ldots,z_n),\ j=1,\ldots,n,$$

которое для краткости будем обозначать $w=f(z)$. (1)

Точка $a=(a_1,\ldots,a_n)\in G$ называется нулём системы (1), если $f_j(a)=0$, $j=1,\ldots,n$.

Будем предполагать в дальнейшем, что $E_f\cap\partial G=\varnothing$, где $E_f=\{z\in G;\ f_1(z)=\ldots=f_n(z)=0\}$. Из этого следует, что E_f дискретно и якобиан системы (1) $\dfrac{\partial(f)}{\partial(z)}\neq 0$.

Пусть $w=f(z)$ собственно и голоморфно отображает G на полную n-круговую область Γ, причём так, что лебегов $2n$-мерный объем $\pi_n V(\Gamma)<\infty$. Если $F\subseteq\Gamma$ любая n-круговая область*, то через A обозначим прообраз F при отображении (1), т. е. $A=f^{-1}(F)$. Справедлива следующая

Теорема 2. 1. *Пусть $f:G\to\Gamma$, $E_f\cap\partial G=\varnothing$ и $F\subseteq\Gamma$ любая n-круговая область в C^n. Тогда для любой функции φ, голоморфной в G, непрерывной в $\bar G$ имеет место следующая формула*

* В работе всюду предполагается, что рассматриваемые n-круговые области являются n-круговые относительно начала координат.

$$\frac{1}{(2\pi i)^n V(F)} \int\limits_{z \in A} \varphi(z) df \wedge d\bar{f} = \sum_{a^v \in E_f} m_v \varphi(a^v), \tag{2}$$

где m_v *кратность нуля* a^v, $df = df_1 \wedge \ldots \wedge df_n$ и $d\bar{f} = d\bar{f}_1 \wedge \ldots \wedge d\bar{f}_n$.

Следствие 2. 1. При условиях теоремы 2. 1, если положить $\varphi(z) \equiv 1$, то формула (2) дает общее число нулей системы (1) в G с учётом кратности.

3°. Пусть задано голоморфное отображение f области G, содержащей нуль, на n-круговую область $\Omega \subset C^n$. Предположим, что $V(\Omega) < \infty$ и рассмотрим ограниченную n-круговую область D содержащуюся в Q.

Из условия на D следует:

а)

$$f_i(z) = \sum_{\|k_i\|=0}^{\infty} a_{k^i}^i z^{k^i}, \quad i = 1, \ldots, n,$$

где $\|k^i\| = k_1^i + \ldots + k_n^i$, $k_j^i \geq 0$ целые числа, $i, j = 1, \ldots, n$, а $z^{k^i} = z_1^{k_1^i} + \ldots + z_n^{k_n^i}$,

б)

$$m_k(D) \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_D |z^{2k}| d\bar{z} \wedge dz < \infty,$$

для любого $k = (k_1, \ldots, k_n)$, $k_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, n$, где $dz = dz_1 \wedge \ldots \wedge dz_n$, $|z^{2k}| = |z_1|^{2k_1} \ldots |z_n|^{2k_n}$.

Отображение f называется однолистным, если оно голоморфно и каждую точку из образа принимает ровно один раз.

Теорема 3.1. *Пусть f отображает область Q на n-круговую область Ω, причем $V(\Omega) < \infty$ и $f(0) = 0$. Тогда для того чтобы отображение f было однолистным необходимо следующее условие*

$$\sum_{t_1=1}^{\infty} \ldots \sum_{t_n=1}^{\infty} |C_{t_1 \ldots t_n}|^2 m_{t-1}(D) \leq V(\Omega),$$

где $t - 1 = (t_1 - 1, \ldots, t_n - 1)$,

$$C_{t_1 \ldots t_n} = \sum_{k_1^1 + \ldots + k_1^n = t_1} \cdots \sum_{k_1^n + \ldots + k_n^n = t_n} a_{k^1}^1 \ldots a_{k^n}^n \cdot b_k,$$

а числа

$$b_k = \sum_{\tau} (-1)^{\sigma(\tau)} k_1^{\tau_1} \ldots k_n^{\tau_n},$$

$\sigma(\tau)$ *четность перестановки* $\tau = (i_1, \ldots, i_n)$.

Из теоремы 3.1 получаем

Следствие 3. 1. В случае, когда $V(\Omega)\leqslant 1$ и $Q=\{z\in C^n;\ |z_i|<1, i=1,\ldots,n\}$, то получаем следующую оценку для коэффициентов

$$|C_{t_1\ldots t_n}| < \sqrt{t_1\ldots t_n}\,, \tag{3}$$

для всех $t_i\geqslant 1$, $i=1,\ldots,n$.

Следствие 3. 2. В предположении следствия 3.1 потребуем еще, что однолистное отображение $f=(f_1,\ldots,f_n)$ имеет следующий вид

$$f_1(z)=\sum_{k_1=1}^{\infty} a_{k_1} z_1^{k_1}$$

$$f_2(z)=z_2$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$f_n(z)=z_n\,.$$

Тогда неравенство (3) превратится в следующее неравенство

$$|a_{t_1}| < \frac{1}{\sqrt{t_1}}\,. \tag{4}$$

Отметим, что неравенство (4) по существу есть у Бибербаха [3] В многомерном случае оценки для коэффициентов в неявном виде есть в работе [4], где для голоморфного отображения f единичного поликруга в единичный поликруг получена оценка $|a_k^i|<1$, для каждого

$$f_i(z)=\sum_{\|k\|=0}^{\infty} a_k^i z^k,\quad i=1,\ldots,n.$$

Автор пользуется случаем выразить глубокую благодарность своему научному руководителю Л. А. Айзенбергу за постоянное внимание к работе и помощь, а также Ш. А. Даутову за полезное обсуждение.

Институт физики им. Л. В. Киренского СО АН СССР

Ն. Ս. ՄԿՐՏՉՅԱՆ

Լոգարիթմական մնացքի բանաձևի մասին C^n-ում և նրա կիրառությունը միաթերթ արտապատկերումների ուսումնասիրության մեջ

Աշխատանքում ապացուցվում է լոգարիթմական մնացքի մի բանաձև C^n-ում, ի տարբերություն անցյալում հայտնի բանաձևերից, այստեղ ինտեգրումը կատարվում է տիրույթով։ Այդ բանաձևի օգնությամբ միաթերթ արտապատկերման մի դասի համար ստացվել է միաթերթության անհրաժեշտ պայման և գործակիցների համար գնահատական։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *А. П. Южаков, А. В. Куприков*, В кн. Некоторые свойства голоморфных функций многих компл. перем., 181—191, Изд. ИФ АН СССР Красноярск, 1973. [2] *Л. А. Айзенберг*, ДАН СССР, т. 234, № 3 (1977) [3] *L. Bieberbach*, Rend. Palermo, v. 38, 98—112 (1914). [4] *A. Pfister* Math. Annalen 3 146, 249—262 (1962).