ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXVII 1978 5

УДК 519.1

МАТЕМАТИКА

С. М. Гюлумян, К. М. Мосесян

О критических по числу вершинного k-разбиения графах

(Представлено академиком АН Армянской ССР С. Н. Мергеляном 30/VII 1978)

Всюду под словом „граф" будем понимать конечный неориентированный граф, без петель и кратных ребер. Все понятия и обозначения не определяемые здесь, можно найти в ([1]).

В настоящей работе обобщаются теорема Дирака ([2]) и результаты работ ([3,4]) на случай покрытия вершин графа k-вырожденными подграфами ([5]).

Граф $G=(V, X)$ называется k-вырожденным, если минимальная степень любого его подграфа меньше k. Числом $\alpha_k(G)$, $k\geqslant 1$, вершинного k-разбиения графа G называется наименьшее число k-вырожденных подграфов, покрывающих $V(G)$. В частности, $\alpha_1(G)$ — хроматическое число, $\alpha_2(G)$ — число вершинной древесности графа G.

Граф G назовем (ν, k)-критическим, если G — не содержит изолированных вершин, $\alpha_k(G)=\nu$ и для любого ребра $x\in X(G)$ имеет место $\alpha_k(G-x)\leqslant\nu-1$.

Теорема 1. *Для существования (ν, k)-критического ($\nu\geqslant 4$ при $k=1$, $\nu\geqslant 3$ при $k\geqslant 2$) p-вершинного графа необходимо и достаточно, чтобы имело место $p\geqslant k(\nu-1)+1$ и $p\neq k(\nu-1)+2$.*

Необходимость. Пусть $G=(V, X)$ является (ν, k)-критическим графом. Очевидно, $p(G)\geqslant k(\nu-1)+1$. Покажем, что $p(G)\neq k(\nu-1)+2$.

Предположим обратное, то есть $p(G)=k(\nu-1)+2$. Так как в любом (ν, k)-критическом графе для всякой вершины $v\in V(G)$ степень $\rho(v)\geqslant k(\nu-1)$, то $k(\nu-1)+2=p(G)\geqslant 2k(\nu-1)-\varkappa(G)+2$, где $\varkappa(G)$ — связность графа G. Следовательно, $\varkappa(G)\geqslant k(\nu-1)$. Легко заметить, что $\varkappa(G)=k(\nu-1)$, то есть существует разрез $Y=\{y_1, y_2, \ldots, y_{k(\nu-1)}\}\subset V(G)$ такой, что всякая вершина из множества $\{v_1, v_2\}=V(G)\setminus Y$ смежна со всеми вершинами из Y. Значит подграф $\langle Y\rangle$ графа G, порожденный множеством вершин Y, не является полным и, следовательно, существует $Y_1\subset Y$ такое, что Y_1 является $(k+1)$-вершинным k-вырожденным. С другой стороны, $p(\langle V(G)\setminus Y_1\rangle)=$

$= k(\nu-2)+1$ и так как $(v_1 v_2) \bar{\in} X(G)$, то $\alpha_k(\langle V(G) \setminus Y_1 \rangle) = \nu - 2$. Следовательно, $\alpha_k(G) = \nu - 1$, что противоречит условию (ν, k)-критичности графа G.

Достаточность. Пусть $p = k(\nu-1)+1+2t$, где $t = 0, 1, 2, \ldots$ Докажем, что p-вершинный граф

$$W^{k(\nu-1)-2,2t+3} = K_{k(\nu-1)-2} + C_{2t+3},$$

где K_l — l-вершинный полный граф, C_m — m-вершинный простой цикл, является искомым.

Так как $\alpha_k(G) \geq \left\lceil \frac{\alpha_1(G)}{k} \right\rceil$ для любого графа G, то $\alpha_k(W^{k(\nu-1)-2,2t+3}) \geq \nu$. Остается показать, что $\alpha_k(W^{k(\nu-1)-2,2t+3} - x) \leqslant \nu - 1$ для любого ребра $x \in X(W^{k(\nu-1)-2,2t+3})$.

При $k \geq 3$, $x \in X(K_{k(\nu-1)-2})$ включим x в $K_{k(\nu-2)+1}$ и граф $W^{k(\nu-1)-2,2t+3}$ представим в виде соединения $K_{k(\nu-2)+1} + W^{k-3,2t+3}$. Тогда $\alpha_k(W^{k(\nu-1)-2,2t+3} - x) \leqslant \alpha_k(K_{k(\nu-2)+1} - x) + \alpha_k(W^{k-3,2t+3}) = \nu - 1$.

При $k \geq 3$, $x \bar{\in} X(K_{k(\nu-1)-2})$ включим x в $W^{k-2,2t+3}$ и граф $W^{k(\nu-1)-2,2t+3}$ представим в виде соединения $K_{k(\nu-2)} + W^{k-2,2t+3}$. Легко заметить, что $\alpha_k(K_{k(\nu-2)}) = \nu - 2$, $\alpha_k(W^{k-2,2t+3} - x) = 1$. Следовательно, вновь $\alpha_k(W^{k(\nu-1)-2,2t+3} - x) \leqslant \nu - 1$.

Очевидно, $W^{k(\nu-1)-2,2t+3}$ является (ν, k)-критическим и при $k = 1, 2$.

Пусть теперь $p = k(\nu-1)+4+2t$, где $t = 0, 1, 2, \ldots$. Докажем, что искомым графом будет p-вершинный граф

$$G^{k,\nu,t} = K^t + K_{k(\nu-1)-3},$$

где

$$V(K^t) = \{v_1, v_2, \ldots, v_{2t+7}\},$$

$$X(K^t) = \Big\{ \bigcup_{i=2}^{3} ((v_1 v_i) \cup (v_5 v_i)) \cup (v_1 v_6) \cup (v_1 v_{2t+7}) \cup (v_2 v_3) \cup \bigcup_{i=5}^{2t+7} (v_4 v_i) \cup$$

$$\cup \bigcup_{i=6}^{2t+6} (v_i v_{i+1}) \Big\}.$$

Аналогично предыдущему случаю, легко подсчитать, что $\alpha_k(G^{k,\nu,t}) \geq \nu$. Пусть $k \geq 3$ и $x = (ab)$ — произвольное ребро графа $G^{k,\nu,t}$. Покажем, что $\alpha_k(G^{k,\nu,t} - x) \leqslant \nu - 1$. Возможны следующие случаи:

1. $x \in X(K^t)$,
2. $x \in X(K_{k(\nu-1)-3})$,
3. $a \in V(K^t)$, $\quad b \in V(K_{k(\nu-1)-3})$.

В случае 1, очевидно $\alpha_k(K^t + K_{k-3} - x) = 1$, а для оставшейся непокрытой части $K_{k(\nu-2)}$ рассматриваемого графа, $\alpha_k(K_{k(\nu-2)}) = \nu - 2$. Поэтому $\alpha_k(G^{k,\nu,t} - x) \leqslant \nu - 1$.

Пусть $k = 3$. В случае 2 имеем $\alpha_3(K^t - v) = 1$, $\alpha_3((K_{3(\nu-2)} + K_1) - x) = \nu - 2$, где $V(K_1) = \{v\} \subset V(K^t)$. Значит, $\alpha_3(G^{3,\nu,t} - x) \leqslant \nu - 1$. Если же имеет место случай 3, то в качестве v выбираем ту вершину из K^t, которая смежна ребру x, и рассуждаем аналогичным образом.

Пусть $k \geq 4$. В случае $x \in X(K_{k(\nu-1)-3})$ включим x в $K_{k(\nu-2)+1}$ и граф $G^{k,\nu,l}$ представим в виде соединения $(K^l+K_{k-4})+K_{k(\nu-2)+1}$. Легко заметить, что $\alpha_k(G^{k,\nu,l}-x) \leq \alpha_k(K^l+K_{k-4})+\alpha_k(K_{k(\nu-2)+1}-x)=\nu-1$. Наконец, пусть $a \in V(K^l)$, $b \in V(K_{k(\nu-1)-3})$. Тогда вершины a и b включим в $K_{k(\nu-2)+1}$ и граф $G^{k,\nu,l}$ представим в виде соединения $K_{k(\nu-2)+1}+((K^l-a)+K_1)+K_{k-4}$, где $V(K_1) \not\subseteq V(K_{k(\nu-2)+1}) \cup V(K^l-a)$. Не трудно проверить, что при этом $\alpha_k(K_{k(\nu-2)+1}-(ab))=\nu-2$, $\alpha_k(((K^l-a)+K_1)+K_{k-4})=1$. Следовательно, $G^{k,\nu,l}$ является (ν, k)-критическим графом при $k \geq 3$.

$(\nu, 1)$-критичность графа $G^{1,\nu,l}$ очевидна. Рассмотрим случай $k=2$, которому посвящена работа [4]. Покажем $(3, 2)$-критичность графа K^l+K_1. Пусть $V(K_1)=\{v\}$, $x=(v\ v_1)$ (соответственно $x=(v\ v_4)$). Очевидно, подграфы графа K^l+K_1-x, порожденный вершинами v, v_1, v_2, v_4 (соответственно вершинами v, v_1, v_3, v_4) и порожденный остальными вершинами графа K^l+K_1-x, являются 2-вырожденными. Если же $x \in X(K^l+K_1) \setminus \{(v\ v_1), (v\ v_4)\}$, то легко заметить, что $\alpha_2(K^l+K_1-x)=2$. Так как $\alpha_1(K^l+K_1)=5$ и $\alpha_2(K^l+K_1) \geq \left\lceil \frac{\alpha_1(K^l+K_1)}{2} \right\rceil = 3$, то $(3, 2)$-критичность графа K^l+K_1 доказана. Пользуясь этим свойством графа K^l+K_1 и представлением $G^{2,\nu,l}=(K^l+K_1)+K_{2(\nu-3)}$, легко убедиться в $(\nu, 2)$-критичности графа $G^{2,\nu,l}$.

Все случаи исчерпаны, теорема доказана.

Очевидно, $(3, 1)$-критические графы — суть простые циклы нечетной длины, а K_2 — единственный $(2, 1)$-критический граф. На вопрос существования $(2, k)$-критических графов отвечает следующая

Теорема 2. *Для существования $(2, k)$-критического p-вершинного графа необходимо и достаточно, чтобы имело место $p \geq k+1$.*

Действительно, достаточно рассмотреть граф $\overline{K}_{k-2}+C_{p-k+2}$.

Вычислительный центр
Академии наук Армянской ССР и
Ереванского государственного университета

Ս. Մ. ԳՅՈՒԼՈՒՄՅԱՆ, Կ. Մ. ՄՈՍԵՍՅԱՆ

Ըստ գագաթային k-տրոհման թվի կրիտիկական գրաֆների մասին

Դիտարկվում են վերջավոր գրաֆներ, առանց զուգահեռ կողերի և հանգույցների։

Ներկա աշխատանքում ընդհանրացվում են Դիրակի թեորեմը [2] և գրաֆի գագաթները k-այլասերված ենթագրաֆներով ծածկելու դեպքի համար [3,4] աշխատանքների արդյունքները։

Գրաֆը կոչվում է k-այլասերված, եթե նրա ցանկացած ենթագրաֆի մինիմալ աստիճանը փոքր է k-ից: Գրաֆի գագաթային k-տրոհման թիվ $a_k(G)$, $k\geqslant 1$, կոչվում է գագաթների $V(G)$ բազմությունը ծածկող k-այլասերված ենթագրաֆների նվազագույն թիվը: G գրաֆը կանվանենք (ν, k)-կրիտիկական, եթե G-ն չի պարունակում մեկուսացված գագաթներ, $a_k(G)=\nu$ և ցանկացած $x\in X(G)$ կողի համար տեղի ունի $a_k(G-x)\leqslant \nu-1$:

Թեորեմ 1. Որպեսզի գոյություն ունենա (ν, k)-կրիտիկական ($\nu\geqslant 4$ երբ $k=1$, $\nu\geqslant 3$, երբ $k\geqslant 2$) p-գագաթանի գրաֆ, անհրաժեշտ է և բավարար, որպեսզի տեղի ունենա $p\geqslant k(\nu-1)+1$ և $p\neq k(\nu-1)+2$:

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Ф. Харари*, Теория графов, „Мир", М., 1973. [2] *O. Ore*, The four-color problem, Academic press, New York, London, 189—191, 1967. [3] *H. V. Kronk*, J. Mitchem, Critical point-arboritic graphs, J. London Math. Soc., 9, No. 3, 459—466, 1975. [4] *B. Bollobas, F. Harary*, Point arboricity critical graphs exist, J. London Math. Soc., 12, No. 1, 97—102, 1975. [5] *D. R. Link, A. T. White*, k-degenerate graphs, Canad. J. Math., 22, 1082—1096, 1970.