УДК 519.18

МАТЕМАТИКА

Ю. М. Мовсисян

Группоиды, являющиеся объединениями групп

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александряном 6/VII 1978)

Группоид будем называть $\mathcal{L}$ -наследственным (q -наследственным), если каждый его истинный подгруппоид есть группа (соответственно квазигруппа) и слабо $\mathcal{L}$ -наследственным (слабо q -наследственным), если каждый его истинный неидемпотентный подгруппоид есть группа (квазигруппа).

Описание $\mathcal{L}$ -наследственных полугрупп (под названием $\mathcal{L}$ -полугрупп) дано в работе (1). Аналогичная тематика достаточно развита также и в теории колец и модулей, где исследуются кольца и модули по тем или иным свойствам их подколец и подмодулей. Однако уже строение наследственных квазигрупп оказывается сложным (2).

Группоид (в частности квазигруппу) $Q(\cdot)$ будем называть:

- i) моноассоциативным, если подгруппоид (a) , порожденный каждым его элементом $a \in Q$ является полугруппой;
- ii) биассоциативным, если подгруппоид (a, b) , порожденный каждым двумя элементами $a, b \in Q$, является полугруппой.

Лемма 1. *Любая биассоциативная квазигруппа является лупой.*

Покажем, что в каждой биассоциативной квазигруппе $Q(\cdot)$ существует единичный элемент. Для любого элемента $a \in Q$ существуют локальные единицы $e_a, f_a \in Q$, т. е.

$$f_a \cdot a = a \cdot e_a = a.$$

Покажем, что каждый из элементов f_a и e_a — идемпотент. Например,

$$a \cdot e_a = a.$$

$$(a \cdot e_a)e_a = a \cdot e_a.$$

$$a \cdot e_a^2 = a \cdot e_a.$$

$$e_a^2 = e_a.$$

С другой стороны, если элементы $x, y \in Q$ являются идемпотентами биассоциативной квазигруппы $Q(\cdot)$, то

$$x \cdot y = z \rightarrow z \cdot y = (x \cdot y)y = x \cdot y^2 = x \cdot y.$$

Таким образом, $x = z$ и, следовательно, $x = y$. Иначе говоря биассоциативная квазигруппа обладает лишь одним идемпотентом.

Лемма 2. *Каждая биассоциативная периодическая лупа q -наследственна.*

Пусть $Q(\cdot)$ — произвольная периодическая биассоциативная лупа с единичным элементом $e \in Q$ и $Q'(\cdot)$ — некоторый подгруппонд. Покажем, например, что уравнение

$$a \cdot x = b$$

разрешимо в $Q'(\cdot)$ для любых $a, b \in Q'$. Если $a \neq e$, то существует натуральное число $k_a \neq 1$ такое, что

$$a^{k_a} = e.$$

Следовательно:

$$x = a^{k_a} \cdot x = (a^{k_a-1} \cdot a)x = a^{k_a-1}(a \cdot x) = a^{k_a-1} \cdot b$$

Теорема 1. *Биассоциативная квазигруппа q -наследственна, если и только если она — периодическая лупа.*

Порождаемость квазигрупп будем понимать в смысле порождаемости группондов.

Предложение 1. Не конечно-порожденная квазигруппа является g -наследственной, если и только если она — периодическая группа.

Для конечно-порожденных группондов (квазигрупп) $Q(\cdot)$ будем рассматривать минимальное множество порождающих M с наименьшим числом элементов m . В случае $m=1$ группонд-циклический.

Предложение 2. Квазигруппа с условием $m \geq 4$ является g -наследственной, если и только если она — периодическая группа.

Предложение 3. Если при $m=3$ квазигруппа является g -наследственной, то она — периодическая биассоциативная лупа.

Предложение 4. Если при $m=3$ коммутативная квазигруппа является g -наследственной и существует пара элементов из M с взаимно-простыми порядками, то она — периодическая группа.

Предложение 5. Если g -наследственная квазигруппа при $m=3$ обладает такой парой $a, b \in M$ элементов с взаимно-простыми порядками, что отображения

$$\varphi: x \rightarrow x^{|a|}, \quad \psi: x \rightarrow x^{|b|}$$

являются эндоморфизмами, то она — периодическая группа.

Эндоморфизм φ группонда $Q(\cdot)$ назовем идемпотентным, если для любого $x \in Q$ справедливо равенство

$$\varphi x = (\varphi x)^2$$

и отображение φ действует инъективно на множестве всех идемпотентов.

Теорема 2. Если слабо r -наследственный группоид (без единицы!) в случае $m=2$ обладает идемпотентным эндоморфизмом, то он есть объединение непересекающихся периодических групп.

Следствие 1. Если моноассоциативный слабо r -наследственный группоид (без единицы) обладает идемпотентным эндоморфизмом, то он есть объединение непересекающихся периодических групп.

Следствие 2. Если нециклический слабо r -наследственный группоид (без единицы) обладает идемпотентным эндоморфизмом, то он есть объединение непересекающихся периодических групп.

Теорема 3. Если моноассоциативный слабо q -наследственный группоид (без единицы) обладает идемпотентным эндоморфизмом, то он есть объединение непересекающихся периодических групп.

Очевидно, что для циклического группоида, обладающего хотя бы двумя идемпотентами, не существует идемпотентного эндоморфизма. Рассмотрим пример конечной квазигруппы обладающей идемпотентным эндоморфизмом.

$\cdot$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	7	8	9	4	6	5
2	2	3	1	8	9	7	6	5	4
3	3	1	2	9	7	8	5	4	6
4	7	8	9	4	5	6	1	2	3
5	8	9	7	5	6	4	2	3	1
6	9	7	8	6	4	5	3	1	2
7	4	6	5	1	2	3	7	8	9
8	6	5	4	2	3	1	8	9	7
9	5	4	6	3	1	2	9	7	8

В построенной квазигруппе существуют всего три идемпотента:

$$E = \{1, 4, 7\}.$$

Отображение

$$\{1, 2, 3\} \rightarrow 1$$

$$\{4, 5, 6\} \rightarrow 7$$

$$\{7, 8, 9\} \rightarrow 4$$

является идемпотентным эндоморфизмом. Периодические группы, дизъюнктивно покрывающие всю квазигруппу, будут:

$$Q_{e_1-1} = \{1, 2, 3\},$$

$$Q_{e_2-1} = \{4, 5, 6\},$$

$$Q_{e_3-1} = \{7, 8, 9\};$$

Изменяя умножение идемпотентных элементов получаем квазигруппу, которая по-прежнему дизъюнктивно покрывается периодическими группами, хотя она уже не будет обладать идемпотентным эндоморфизмом.

Эндоморфизм φ группоида $(Q, \cdot)$ называется нулевым, если образ элемента $a \in Q$, обладающего локальной единицей

$$a \cdot e_a = e_a \cdot a = a.$$

определяется по правилу

$$\varphi a = e_a.$$

В частности, нулевой эндоморфизм действует тождественно на множестве всех идемпотентов.

Теорема 4. Если моноассоциативный слабо r -наследственный группоид (без единицы) обладает нулевым эндоморфизмом, то он есть объединение непересекающихся периодических групп.

Следствие. Если нециклический слабо r -наследственный группоид (без единицы) обладает нулевым эндоморфизмом, то он есть объединение непересекающихся периодических групп.

Теорема 5. Если слабо r -наследственный циклический группоид обладает нулевым эндоморфизмом, то дополнение множества всех ее одноэлементных образующих есть объединение непересекающихся периодических групп.

Теорема 6. Если слабо q -наследственный моноассоциативный циклический группоид обладает нулевым эндоморфизмом, то дополнение множества всех ее одноэлементных образующих есть объединение непересекающихся периодических групп.

Ереванский государственный университет

ՅՈՒ. Մ. ՄՈՎՍԻՍՅԱՆ

Խմբակերպեր, որոնք հանդիսանում են խմբերի գումարներ

Կիսախմբերի տեսության մեջ հայտնի է այն կիսախմբերի լրիվ նկարագիրը, որոնք հանդիսանում են խմբերի գումարների ներկա աշխատանքում

ուսումնասիրվում են խմբակերպեր և β -խմբեր (քվադրիպլեր), որոնք հանդիսանում են խմբերի գումարների Այս ուղղությամբ մասամբ բացահայտվում է նաև ժառանգական խմբակերպերի և β -խմբերի կառուցվածքը (ստրուկտուրան): Ընդ որում խմբակերպը կոչվում է r -ժառանգական (Q -ժառանգական), եթե նրա ցանկացած ենթախմբակերպ հանդիսանում է խումբ (β -խումբ):

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ G. Pollak, L. Redei, „Publ. Math.“ 6, № 1—2, 126—130 (1959). ² Ю. М. Мосисян, „Известия АН Арм.ССР“, сер. Математика, № 6, 485—502 (1976).