ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXVII 1978 3

УДК 539.3

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

В. С. Макарин

Об одной осесимметричной контактной задаче для упругого слоя, расслабленного монетообразной трещиной

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Б. Л. Абрамяном 6/V 1978)

Рассматривается осесимметричная контактная задача о растяжении упругого слоя, расслабленного монетообразной трещиной, двумя одинаковыми круговыми в плане абсолютно жесткими дисками, сцепленными к граничным плоскостям слоя. Решение задачи строится при помощи бигармонической функции Лява, которая берется в виде интеграла Ханкеля. На основе интегрального преобразования Ханкеля решение задачи сводится к решению системы интегральных уравнений относительно двух функций контактных напряжений под диском и одной функции деформаций берега трещины. Введя новые функции, непосредственно связанные с указанными выше, относительно последних получается система из двух сингулярных интегральных уравнений с ядром Коши и одного интегрального уравнения Фредгольма второго рода. Далее, на основе аппаратов ортогональных многочленов Якоби и Лежандра решение последней системы сводится к решению эквивалентных квазивполне регулярных бесконечных систем линейных алгебраических уравнений. Отметим, что близкая по своей постановке задача, когда расслабленный монетообразной трещиной слой по своим граничным плоскостям подвергается воздействию сжимающих нормальных сил, ранее была исследована в ([1]).

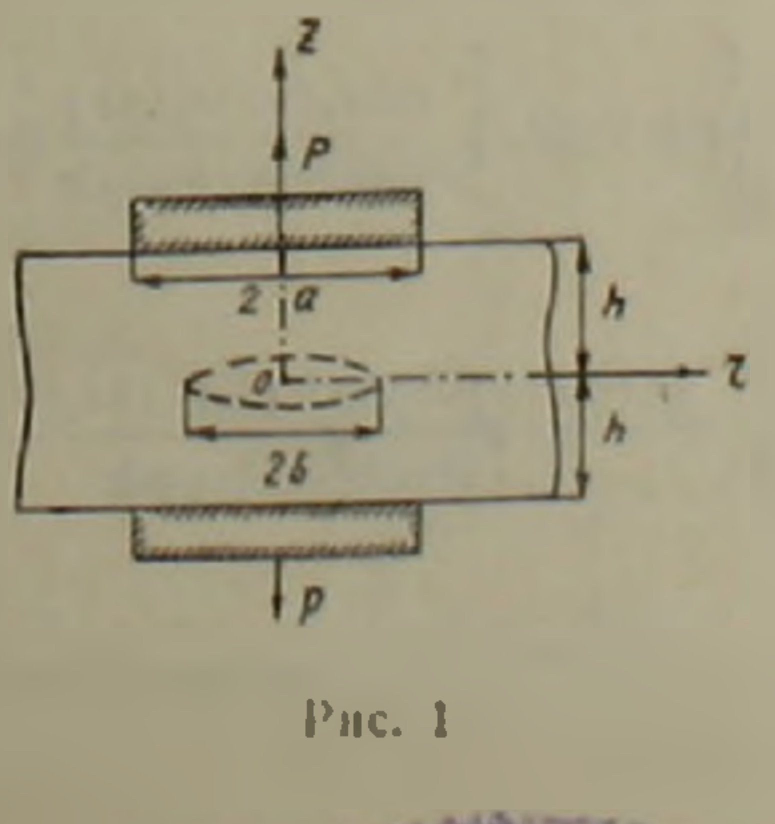

Рис. 1

1. Пусть упругий слой толщиной $2h$ в своей плоскости $z=0$ расслаблен монетообразной трещиной радиуса b и подвергается растяжению посредством двух жестких дисков радиусов a, сцепленных к граничным плоскостям слоя $z=\pm h$ (рис. 1).

Граничные условия задачи запишутся в виде:

$$\sigma_z(r, z)|_{z=h}=0; \quad \tau_{rz}(r, z)|_{z=h}=0 \quad (r>a) \tag{1.1), (1.2}$$

$$U_z(r, z)|_{z=h}=c; \quad U_r(r, z)|_{z=h}=0 \quad (0\leq r\leq a) \tag{1.3); (1.4}$$

$$\sigma_z(r, z)|_{z=0}=0; \quad \tau_{rz}(r, z)|_{z=0}=0 \quad (0\leq r<b) \tag{1.5); (1.6}$$

Кроме того имеют место условия симметрии:

$$\tau_{rz}(r, z)|_{r=0}=U_r(r, z)|_{r=0}=0 \quad (0\leq z\leq h) \tag{1.7}$$

$$\tau_{rz}(r, z)|_{z=0}=U_z(r, z)|_{z=0}=0 \quad (r\geq b) \tag{1.8}$$

Бигармоническую функцию Лява представим в виде интеграла Ханкеля

$$\Phi(r, z)=\int_0^\infty [A(\mu)\operatorname{sh}\mu z+B(\mu)\operatorname{ch}\mu z+\mu zC(\mu)\operatorname{sh}\mu z+\mu zD(\mu)\operatorname{ch}\mu z]\, J_0(\mu r)d\mu,$$

здесь $J_0(x)$ — функция Бесселя первого рода нулевого индекса действительного аргумента. Пользуясь известными формулами ([2]), компоненты напряжений и перемещений выразим при помощи интегралов Ханкеля. Удовлетворяя условиям (1.1; 1.2, 1.6; 1.8), на основе интегрального преобразования Ханкеля функции интегрирования выразим через функции контактных напряжений под диском и деформаций берега трещины. Удовлетворяя, далее, условиям (1.3; 1.4; 1.5) решение задачи сведем к решению следующей системы интегральных уравнений:

$$\int_0^a tp(t)\,dt \int_0^\infty J_0(\mu t)J_0(\mu r)d\mu+\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}\int_0^a tq(t)\,dt\int_0^\infty J_1(\mu t)J_0(\mu r)d\mu+$$

$$+\frac{1}{2(1-\nu)}\int_0^a tp(t)\,dt\int_0^\infty \frac{1/2(e^{-2\mu h}-1)-\mu h}{\operatorname{sh}\mu h\operatorname{ch}\mu h+\mu h}J_0(\mu t)J_0(\mu r)d\mu-$$

$$-\int_0^a tq(t)dt\int_0^\infty \frac{\mu hJ_1(\mu t)J_0(\mu r)}{\operatorname{sh}\mu h\operatorname{ch}\mu h+\mu h}d\mu-$$

$$-\frac{1}{2(1-\nu)}\int_0^b t\varepsilon(t)dt\int_0^\infty \frac{(\operatorname{sh}\mu h+\mu h\operatorname{ch}\mu h)J_1(\mu t)J_0(\mu r)d\mu}{\operatorname{sh}\mu h\operatorname{ch}\mu h+\mu h}=\frac{c}{4G(1-\nu)}$$

$$(0\leq r\leq a) \tag{1.9}$$

$$\int_0^a tq(t)dt\int_0^\infty J_1(\mu t)J_1(\mu r)d\mu+\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}\int_0^a tp(t)dt\int_0^\infty J_0(\mu t)J_1(\mu r)d\mu+$$

$$+\frac{1}{2(1-\nu)}\int_0^a tq(t)dt\int_0^\infty\frac{1/2(e^{-2\mu h}-1)-\mu h}{\operatorname{sh}\mu h\operatorname{ch}\mu h+\mu h}J_1(\mu t)J_1(\mu r)d\mu-$$

$$-\int_0^a tp(t)dt\int_0^\infty\frac{\mu hJ_1(\mu r)J_0(\mu t)d\mu}{\operatorname{sh}\mu h\operatorname{ch}\mu h+\mu h}-\int_0^b t\varepsilon(t)dt\int_0^\infty\frac{\mu h\operatorname{sh}\mu hJ_1(\mu t)J_1(\mu r)d\mu}{\operatorname{sh}\mu h\operatorname{ch}\mu h+\mu h}=0$$

$$(0<r\leqslant a)\qquad(1.10)$$

$$\int_0^b t\varepsilon(t)dt\int_0^\infty\mu J_1(\mu t)J_0(\mu r)d\mu-$$

$$-2(1-\nu)\int_0^b t\varepsilon(t)dt\int_0^\infty\frac{\mu[\mu h(\mu h+1)+1/2(1-e^{-2\mu h})]J_1(\mu t)J_0(\mu r)d\mu}{\operatorname{sh}\mu h\operatorname{ch}\mu h+\mu h}+$$

$$+2(1-\nu)\int_0^a tp(t)\,dt\int_0^\infty\frac{\mu(\operatorname{sh}\mu h+\mu h\operatorname{ch}\mu h)}{\operatorname{sh}\mu h\operatorname{ch}\mu h+\mu h}J_0(\mu t)J_0(\mu r)d\mu+$$

$$+2(1-\nu)\int_0^a tp(t)dt\int_0^\infty\frac{\mu^2h\operatorname{sh}\mu hJ_1(\mu t)}{\operatorname{sh}\mu h\operatorname{ch}\mu h+\mu h}J_0(\mu r)d\mu=0\quad(0\leqslant r<b)\qquad(1.11)$$

Следуя работе [3] систему интегральных уравнений преобразуем следующим образом:

$$\int_0^a tp(t)J_0(\mu t)dt=\frac{2}{\pi}\int_0^a tp(t)dt\int_0^t\frac{\cos\mu y\,dy}{\sqrt{t^2-y^2}}=\int_0^a\sigma(y)\cos\mu y\,dy.$$

$$\int_0^a tq(t)J_1(\mu t)dt=\frac{2}{\pi}\int_0^a tq(t)dt\int_0^t\frac{y\sin\mu y\,dy}{\sqrt{t^2-y^2}}=\int_0^a\tau(y)\sin\mu y\,dy.$$

$$\int_0^b t\varepsilon(t)J_1(\mu t)dt=\int_0^b H(y)\sin\mu y\,dy.$$

здесь

$$\sigma(y)=\frac{2}{\pi}\int_y^a\frac{tp(t)dt}{\sqrt{t^2-y^2}};\quad\tau(y)=\frac{2y}{\pi}\int_y^a\frac{q(t)dt}{\sqrt{t^2-y^2}},\quad H(y)=\frac{2y}{\pi}\int_y^b\frac{\varepsilon(t)dt}{\sqrt{t^2-y^2}}.$$

Отметим, что если известны функции $\sigma(y)$, $\tau(y)$ и $H(y)$, то функции $p(t)$; $q(t)$ и $\varepsilon(t)$ определятся при помощи формул обращения Абеля. Переходя в системе (1.9—1.11) к функциям $\sigma(y)$; $\tau(y)$ и $H(y)$ и применив к полученным уравнениям соответственно операторы

$$I_1\varphi=\frac{d}{dx}\int_0^x\frac{r\varphi(r)dr}{\sqrt{x^2-r^2}};\quad I_2\varphi=\frac{d}{dx}\left[x\int_0^x\frac{\varphi(r)dr}{\sqrt{x^2-r^2}}\right];\quad I_3\varphi=\int_0^x\frac{r\varphi(r)dr}{\sqrt{x^2-r^2}}.$$

После несложных выкладок систему (1.9—1.11) преобразуем к виду:

$$\sigma^*(x)-\frac{\theta}{\pi}\int_{-a_0}^{a_0}\frac{\tau^*(y)dy}{x-y}+\int_{-a_0}^{a_0}K_{11}(x,y)\sigma^*(y)dy-\int_{-a_0}^{a_0}K_{12}(x,y)\tau^*(y)dy-$$

$$-\int_{-b_0}^{b_0}K_{13}(x,y)H^*(y)dy=c_0\quad(-a_0<x<a_0)\tag{1.12}$$

$$\tau^*(x)+\frac{\theta}{\pi}\int_{-a_0}^{a_0}\frac{\sigma^*(y)dy}{x-y}+\int_{-a_0}^{a_0}K_{21}(x,y)\tau^*(y)dy-\int_{-a_0}^{a_0}K_{22}(x,y)\sigma^*(y)dy-$$

$$-\int_{-b_0}^{b_0}K_{23}(x,y)H^*(y)dy=0\quad(-a_0<x<a_0)\tag{1.13}$$

$$H^*(x)-\int_{-b_0}^{b_0}K_{31}(x,y)H^*(y)dy+\int_{-a_0}^{a_0}K_{32}(x,y)\sigma^*(y)dy+\int_{-a_0}^{a_0}K_{33}(x,y)\tau^*(y)dy=0$$

$$(-b_0<x<b_0)\tag{1.14}$$

Следует отметить, что здесь искомые функции на отрицательные значения аргумента продолжены следующим образом:

$$\sigma(y)=\sigma(-y);\quad \tau(y)=-\tau(-y);\quad H(y)=-H(-y)$$

и введены обозначения

$$K_{11}(x,y)=\frac{h}{2\pi(1-\nu)}\int_0^\infty\frac{1/2(e^{-2\lambda}-1)-\lambda}{\mathrm{sh}\lambda\,\mathrm{ch}\lambda+\lambda}\cos\lambda x\cos\lambda y\,d\lambda;\quad f^*(x)=f(hx)$$

$$K_{12}(x,y)=\frac{h}{\pi}\int_0^\infty\frac{\lambda\sin\lambda y\cos\lambda x}{\mathrm{sh}\lambda\,\mathrm{ch}\lambda+\lambda}d\lambda;\qquad \theta=\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}$$

$$K_{13}(x,y)=\frac{h}{2\pi(1-\nu)}\int_0^\infty\frac{\mathrm{sh}\lambda+\lambda\,\mathrm{ch}\lambda}{\mathrm{sh}\lambda\,\mathrm{ch}\lambda+\lambda}\cos\lambda x\sin\lambda y\,d\lambda;\qquad c_0=\frac{c}{4G(1-\nu)}$$

$$K_{31}(x,y)=\frac{h}{2\pi(1-\nu)}\int_0^\infty\frac{1/2(e^{-2\lambda}+1)-\lambda}{\mathrm{sh}\lambda\,\mathrm{ch}\lambda+\lambda}\sin\lambda x\sin\lambda y\,d\lambda,$$

$$K_{22}(x, y)=\frac{h}{\pi}\int_0^\infty \frac{\lambda\cos\lambda y\sin\lambda x}{\mathrm{sh}\lambda\mathrm{ch}\lambda+\lambda}d\lambda; \quad a_0=\frac{a}{h}; \quad b_0=\frac{b}{h}$$

$$K_{23}(x, y)=\frac{h}{2\pi(1-\nu)}\int_0^\infty \frac{\lambda\mathrm{sh}\lambda\sin\lambda y}{\mathrm{sh}\lambda\mathrm{ch}\lambda+\lambda}\sin\lambda x d\lambda$$

$$K_{31}(x, y)=h(1-\nu)\int_0^\infty \frac{\lambda(\lambda+1)+1/2(1-e^{-2\lambda})}{\mathrm{sh}\lambda\mathrm{ch}\lambda+\lambda}\sin\lambda y\sin\lambda x d\lambda$$

$$K_{32}(x, y)=h(1-\nu)\int_0^\infty \frac{\mathrm{sh}\lambda+\lambda\mathrm{ch}\lambda}{\mathrm{sh}\lambda\mathrm{ch}\lambda+\lambda}\cos\lambda y\sin\lambda x d\lambda;$$

$$K_{33}(x, y)=h(1-\nu)\int_0^\infty \frac{\lambda\mathrm{sh}\lambda\sin\lambda y}{\mathrm{sh}\lambda\mathrm{ch}\lambda+\lambda}\sin\lambda x d\lambda.$$

2. С целью сведения разрешающей системы уравнений (1.12—1.14) к бесконечным системам линейных уравнений, умножим (1.13) на i и сложим с (1.12). Затем неизвестные функции $\varphi(x)=\sigma^*(x)+i\tau^*(x)$ и $H^*(x)$ представим в виде рядов соответственно по многочленам Якоби и Лежандра:

$$\varphi(x)=\omega(x)\sum_{n=0}^\infty X_n P_n^{(-\alpha,\alpha)}(x/a_0); \quad H^*(x)=\sum_{n=1}^\infty Y_n P_{2n-1}(x/b_0) \quad (2.1);\ (2.2)$$

$$\omega(x)=(a_0-x)^{-\alpha}(a_0+x)^{\alpha}; \quad \alpha=i\varkappa; \quad \varkappa=1/2\pi\ln(3-4\nu).$$

Далее, пользуясь известным интегральным соотношением для многочленов Якоби ([4]), по известной процедуре решение системы (1.12—1.14) сведем к следующей эквивалентной бесконечной системе линейных алгебраических уравнений:

$$X_n+c_n\left[\sum_{m=1}^\infty A_{mn}X_m+\sum_{m=1}^\infty B_{mn}\overline{X}_m+a_n\right]=0, \tag{2.3}$$

$$Y_n+d_n\left[\sum_{m=1}^\infty C_{mn}Y_m+b_n\right]=0, \tag{2.4}$$

$$(n=1,\ 2,\ \ldots); \quad c_n=\frac{(n+1/2)(n!)^2a_0}{\Gamma(n+1-\alpha)\Gamma(n+1+\alpha)}; \quad d_n=(2n-1/2)a_0.$$

Выражения ядер и свободных членов бесконечных систем (2.3; 2.4) представляют коэффициенты Фурье по многочленам Якоби и Лежандра и здесь не приводятся.

Введением новых неизвестных

$$X_n=\prod_n^{1-\varepsilon}X_n^*; \quad Y_n=n^{1-\varepsilon}Y_n^*; \quad (0<\varepsilon\ll 1)$$

можно показать, что системы (2.3; 2.4) при любых значениях параметров квазивполне регулярны ([5]). Постоянная определяется из условия равновесия штампа

$$\int_0^a rp(r)dr=\frac{h}{2}\int_{-a_0}^{a_0}\sigma^*(x)dx=\frac{h}{2}\int_{-a_0}^{a_0}\varphi(x)dx=\frac{P}{2\pi}$$

которое с учетом (2.1) дает

$$X_0=-\frac{\varkappa\,\mathrm{sh}\,\pi\varkappa P}{2\pi^2 a\varkappa}.$$

Что же касается постоянной c_0, то она выражается в виде суммы коэффициентов разложений (2.1; 2.2). Отметим еще, что системы (2.3; 2.4) можно значительно упростить, если учесть, что из условий (1.15) следует

$$\mathrm{Re}\,X_{2n-1}=\mathrm{Im}\,X_{2n}=0\quad(n=1,\ 2,\ \ldots)\qquad(^6)$$

однако, на этом останавливаться не будем.

Автор выражает свою благодарность С. М. Мхитаряну за постановку задачи и внимание к работе.

Институт механики
Академии наук Армянской ССР

Վ. Ս. ՄԱԿԱՐՅԱՆ

Դրամաձև ճաքով թուլացված առաձգական շերտի համար մի առանցքասիմետրիկ կոնտակտային խնդրի մասին

Դիտարկվում է դրամաձև ճաքով թուլացված առաձգական շերտի առանցքասիմետրիկ կոնտակտային խնդիրը, երբ շերտը ենթարկվում է ձգման իր եզրային հարթություններին հարակցված դրոշմների միջոցով։ Խնդրի լուծումը ներկայացվում է Հանկելի ինտեգրալի տեսքով։ Օգտագործելով Յակոբիի և Լեժանդրի օրթոգոնալ բազմանդամները, խնդրի լուծումը վերջին հաշվով հանգեցվում է գծային, հանրահաշվական քվազիլիովին ռեգուլյար համակարգի լուծմանը։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *В. С. Никишин, Г. С. Шапиро.* Сб. Успехи механики деформируемых сред, Изд «Наука», М., 1975. [2] *С. Л. Тимошенко,* Теория упругости, ОНТИ, М., 1937. [3] *Г. Я. Попов,* ПММ, 37, вып 6 (1977). [4] *Г. Бейтмен* и *А. Эрдейи,* Высшие трансцендентные функции, изд. «Наука», М., 1966. [5] *Н. Х. Арутюнян, С. М. Мхитарян,* ПММ, 36, вып 5 (1972). [6] *Б. Л. Абрамян, В. С. Макарян,* «Известия АН Арм. ССР» механика, т. XXIX, № 5 (1976).