ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXVII 1978 2

УДК 517.43

МАТЕМАТИКА

В. Н. Вардазарян

О плотности состояний в одномерных системах Дирака с модельными случайными потенциалами

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 3/III 1978)

Настоящая статья является продолжением предыдущей работы автора ([1]) и относится к тому же самому объекту одномерной случайной системе Дирака. Следуя монографии ([2]) систему Дирака мы будем записывать в следующем стандартном виде:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} y_1 &= y_1 + \rho_1(t, w) y_2 - \lambda y_2, \quad t \in R^1, \ \omega \in \Omega \\ \frac{d}{dt} y_2 &= -y_2 - \rho_2(t, w) y_1 + \lambda y_1. \end{aligned} \tag{1}$$

Ограниченные функции $\rho_1(t, w)$, $\rho_2(t, w)$ образуют векторный потенциал системы (1). Рассмотрим ее сужение в гильбертовом пространстве $L^2([-L, L])$ вектор-функций $Y(t) = (y_1(t), y_2(t))$ со скалярным произведением $(y, \overline{y}) = \int_{-L}^{L} (y_1 \overline{y}_1 + y_2 \overline{y}_2) dt$, задаваемое граничными условиями

$$\begin{aligned} y_1(-L) \sin \varphi^- - y_2(-L) \cos \varphi^- &= 0, \\ y_1(L) \sin \varphi^+ + y_2(L) \cos \varphi^+ &= 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Пусть $\lambda_0(L)$, $\lambda_{\pm 1}(L), \ldots$ и $y_0(t)$, $y_{\pm 1}(t), \ldots$ $t \in [-L, L]$ соответственно— собственные значения и собственные функции задачи ([1,2]).

Если (для любого $\lambda \in R^1$) существует

$$\lim_{L \to \infty} \frac{1}{2L} N_L([0, \lambda]) = \lim_{L \to \infty} \frac{1}{2L} \sum_{\lambda_i \in [0, \lambda]} 1 = N([0, \lambda])^* \tag{3}$$

то предельная неубывающая функция $N([0, \lambda])$ называется спектральной функцией распределения. Если, к тому же

$$N([0, \lambda]) = \int_0^\lambda n(\mu) d\mu,$$

*Если $\lambda < 0$, то, по определению, $N_L([0, \lambda]) = -N_L([\lambda, 0])$

то $n(\mu)$ называется плотностью состояний. Множество точек роста $N(\lambda)$ обозначим через S — это спектр системы (1).

Теорема 1. *Если $(\rho_1(t, \omega), \rho_2(t, \omega)) = \rho(t, \omega)$ — стационарный, метрический транзитивный, векторозначный случайный процесс, то предел* (3) *с вероятностью* 1 *существует и является неслучайной функцией.*

Доказательство теоремы 1 опирается на следующую лемму об осцилляциях, представляющую самостоятельный интерес.

Введем фазу и амплитуду решения $(y_1(t, \lambda), y_2(t, \lambda))$ системы (1) формулами:

$$y_1(t, \lambda) = r\sin\theta,\ y_2(t, \lambda) = r\cos\theta, \quad \theta \in S^1$$

(здесь S^1 — интервал $(0, \pi)$ с отождествленными концами).

Без труда получается следующее уравнение

$$\frac{d\theta}{dt} = \sin 2\theta + (\lambda - \rho_2(x))\sin^2\theta + (\lambda - \rho_1(x))\cos^2\theta \tag{4}$$

Лемма 1. *При любых $\lambda_2 < \lambda_1$*

$$\frac{\theta_{\lambda_1}(L) - \theta_{\lambda_2}(L)}{\pi} = N_L([\lambda_1, \lambda_2]) + R, \quad |R| \leq 1.$$

Результат, аналогичный теореме 1, для случайного уравнения Шредингера доказан Л. А. Пастуром [3].

Используя лемму 1 и уравнение (4) можно дать ряд явных формул для $N([\lambda_1, \lambda_2])$ в случае марковских потенциалов, вида

$$\rho_1(t, \omega) = F_1(X_t), \quad \rho_2(t, \omega) = F_2(X_t), \tag{5}$$

где x_t — марковский процесс с „хорошими" свойствами в фазовом пространстве K, а $F_1(x)$, $F_2(x)$, $x \in K$ — функции, подчинены таким условиям, которые обеспечивают существование и единственности совместной инвариантной меры у процессов (X_t, θ_t) с плотностью $\pi_\lambda(x, \theta)$ относительно некоторой стандартной меры $dx\,d\theta$. Подробности см., например [1], [4].

Теорема 2. *Для марковских потенциалов вида* (5) *справедливы следующие явные формулы для $n(\lambda)$*

$$1)\ n(\lambda) = \pi\int_K (\lambda - F_2(x))\pi_\lambda(x, 0)\,dx, \tag{6}$$

$$2)\ n(\lambda) = \int_{S^1} \pi_\lambda(\theta)\pi_\lambda(-\theta)\,d\theta, \tag{7}$$

где $\pi_\lambda(\theta) = \int \pi_\lambda(x, \theta)\,dx$ — инвариантная мера фазы θ_t

$$3)\ n(\lambda) = \int \frac{\pi(dx)}{M_{x,0}\tau}, \tag{8}$$

где τ — момент первого попадания фазы θ из 0 в точку π.

В ряде случаев удается явно подсчитать $\pi_\lambda(\theta)$ и за счет этого изучить асимптотику $n(\lambda)$ вблизи характерных точек спектра.

Теорема 3. *Для потенциалов вида* ([5]) *при* $\lambda \to \infty$ *справедлива „вейлевская асимптотика"*

$$N(\lambda) \sim \frac{\lambda}{\pi}.$$

Перейдем теперь к модельным потенциалам, часто встречающимся в физической литературе.

Теорема 4. *Пусть* $\rho_1 = \rho_2 = w$ *— „белый шум", т. е. понимаемая в смысле теории обобщенных функций производная случайного процесса*

$$W = \begin{cases} W_1(t), & t \geq 0 \\ W_2(-t), & t \leq 0 \end{cases}, \quad W_1(0) = W_2(0) = 0, \text{ где } W_1, W_2 -$$

независимые стандартные винеровские процессы. В этом случае:

а) *Лакуны в* S *отсутствуют,*

б) $n(\lambda) \sim \frac{1}{\pi}, \quad \lambda \to \pm \infty$*

в) *плотность* $n(\lambda)$ *достигает максимума при* $\lambda = 0$, *причем*

$$n(0) = \frac{2I_0(2)}{\pi I_0'(1)} > \frac{1}{\pi}. \tag{9}$$

Точно такие же результаты получаются, если $\rho_1 = \dot{W}_1$, $\rho_2 = \dot{W}_2$ где $\dot{W}_1$, $\dot{W}_2$ два независимых „белых шума".

Теорема 5. *Пусть* $\rho_1 = \rho_2 = K(t, \omega)$, $K(t, \omega)$ *— процесс Кронига-Пенни, принимающий (для определенности) значения* 0 *и* 1 *на последовательности показательно распределенных с параметром* 1 *и независимых интервалах. Тогда в спектре* S *операторе* (1) *имеется ровно одна лакуна* (0, 1) (см. ([1])) и

$$n(\lambda) \underset{\lambda \to 0}{\sim} \gamma_0 e^{-\frac{\pi}{\sqrt{2(\lambda-2)}}}, \quad n(\lambda) \underset{\lambda \to 1}{\sim} \gamma_1 e^{-\frac{\pi}{\sqrt{2(\lambda-2)}}} \tag{10}$$

Для постоянных γ_0 и γ_1, также можно указать явные (хотя и громоздкие) выражения через некоторые определенные интегралы.

Если процесс $K(t, \omega)$ принимает на последовательных показательно распределенных интервалах с параметрами n_0 и n_1 значения 0 и A_1, соответственно (т. е. $K(t)$ — марковский альтернирующий процесс восстановления), то формулы типа (10) по-прежнему сохраняются, однако с другими явно вычисляемыми постоянными.

Если $A_1 \to \infty$ и $n_1 \to \infty$, причем $A_1/n_1 \to 1$, то в пределе экспоненциальные формулы (10) получаются и для δ — образных потенциалов.

---

* На теорему 3 в этом случае ссылаться нельзя.

Доказательство теоремы 5 опирается на п. п. 3 теоремы 2, попытка воспользоваться п. п. 1 и 2 наталкивается на труднопреодолимые вычисления.

Теорема 5 обобщает на случай систем Дирака известный результат М. М. Бендерского и Л. А. Пастура ([5]).

В заключение приношу глубокую благодарность С. А. Молчанову за постановку задачи и руководство работой.

Ереванский государственный педагогический
институт им. Х. Абовяна

Վ. Ն. ՎԱՐԴԱԶԱՐՅԱՆ

Դիրակի միաչափ պատահական մոդելային պոտենցիալներով սիստեմի վիճակի խտության մասին

Հոդվածում ուսումնասիրության հիմնական օբյեկտ է հանդիսանում ֆիզիկական կարևոր ինվարիանտ՝ Դիրակի պատահական սիստեմի վիճակի խտություն $n(\lambda)$-ն որը, բնութագրում է այդ սիստեմի սպեկտրի խտությունը։

Բավականին ընդհանուր պայմաններում ապացուցված է, որ $n(\lambda)$-ն ոչ պատահական ֆունկցիա է և հաշված է նրա ասիմպտոտիկան, երբ $\lambda \to \infty$, և որ $n(\lambda)$-ն սպեկտրի լակունային ծայրակետերում էքսպոնենցիալ նվազում է։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *В. Н. Вардазарян*, ДАН Арм. ССР, т. LXIV, № 5 (1977). [2] *Б. М. Левитан, И. С. Саргсян*, Введение в спектральную теорию, М., 1970. [3] *Л. А. Пастур*, УМН, т. XXVIII, № 1 (169), 3—64 (1973). [4] *И. Я. Гольдшейд, С. А. Молчанов, Л. А. Пастур*, «Функциональный анализ», т. II, № 1, 1—10 (1977). [5] *М. М. Бендерский, Л. А. Пастур*, ЖЭТФ, т. 57, № 1 (7), 284—294 (1969).