

УДК 5.19.217

МАТЕМАТИКА

Э. А. Даниелян, Р. Н. Читчян

О времени ожидания в системе $E_k|G|1|\infty$

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. Р. Варшамовым 21/VI 1977)

1°. Рассматривается система массового обслуживания $E_k|G|1|\infty$. Промежутки времени между соседними поступлениями вызовов независимы в совокупности, одинаково распределены и представимы в виде суммы k независимых, упорядоченных по i показательному распределенных случайных величин η_i ($i = \overline{1, k}$), т. е. суммы k независимых фаз поступления. Параметр распределения случайной величины $\eta_i - a_i > 0$. Длительности обслуживания вызовов независимы в совокупности, не зависят от процесса поступления и имеют общую функцию распределения (ф. р.) $B(t)$, $B(+0) = 0$.

Будем говорить, что процесс поступления находится на j -фазе и обозначать это через $\langle j \rangle$, если с момента поступления последнего вызова прошло $j-1$ фаз, а j -ая фаза еще не закончилась.

В момент $t = 0$ система свободна от вызовов и $\langle j \rangle$.

$$\beta(s) = \int_0^\infty e^{-st} dB(t), \quad \beta_l = \int_0^\infty t^l dB(t) \quad (\operatorname{Re} s > 0).$$

Система $E_k|G|1|\infty$ при $a_1 = \dots = a_k = a$ другими методами изучалась в (1,2).

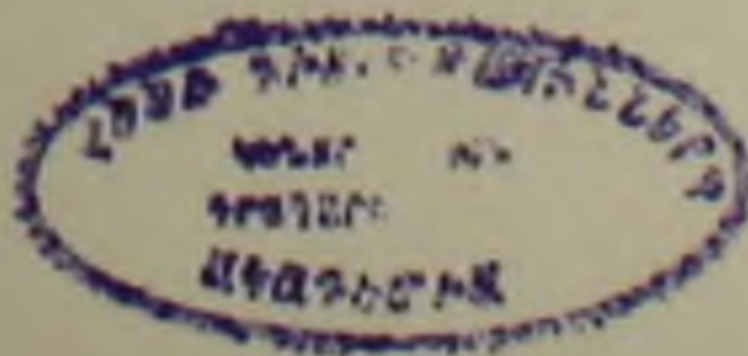
2°. Пусть числа $\lambda_1 > 0, \dots, \lambda_p > 0$ ($p > 1$) попарно различны. Положим

$$\varphi_p(t) = (1 - e^{-\lambda_1 t}) * \dots * (1 - e^{-\lambda_p t}), \quad \varphi_0(t) \equiv 1,$$

где $*$ — знак свертки. Методом математической индукции доказывается

Лемма 1.

$$\varphi_{p-1}(t) - \varphi_p(t) = (-1)^{p-1} \sum_{j=1}^p \frac{\lambda_1 \dots \lambda_{p-1}}{\prod_{\substack{n=1 \\ n \neq j}}^p (\lambda_j - \lambda_n)} \cdot e^{-\lambda_j t}.$$



Если $\lambda_{pk+j} = a_j$, где $p = mk + i$; $i = \overline{0, m}$; $i, j = \overline{1, k}$; $k > 0$, $m \geq 0$, то для вычисления в этом частном случае функции $\varphi_{mk+i-1}(t) - \varphi_{mk+i}(t)$ полагаем $\lambda_{pk+j} = a_j + \epsilon$, используем результат леммы 1 и устремляем ϵ к нулю.

Лемма 2.

$$\begin{aligned} \varphi_{mk+i-1}(t) - \varphi_{mk+i}(t) &= \left(\prod_{n=1}^k a_n \right)^m \cdot \left(\prod_{n=1}^{i-1} a_n \right) \cdot \\ &\cdot \left\{ \sum_{j=1}^i \frac{t^m}{m!} e^{-a_j t} \left[\left(\prod_{\substack{n=1 \\ n \neq j}}^k (a_n - a_j) \right)^m \cdot \left(\prod_{n=1}^{i-1} (a_n - a_j) \right) \right]^{-1} + \right. \\ &\left. + (1 - \delta_{m0}) \sum_{j=i+1}^k \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} \cdot e^{-a_j t} \left[\left(\prod_{\substack{n=1 \\ n \neq j}}^k (a_n - a_j) \right)^m \left(\prod_{n=1}^{i-1} (a_n - a_j) \right) \right]^{-1} \right\}, \end{aligned}$$

где δ_{m0} — символ Кронекера.

3°. Введем ряд обозначений

$$\alpha_{jn}^{(p)}(s) = \frac{\prod_{q=j}^n a_q}{\prod_{\substack{q=j \\ q \neq p}}^n (a_q - a_p)} \begin{cases} 1, & \text{если } j \leq n, \\ \beta(s), & \text{если } n < j \leq k, \end{cases}$$

где

$$\prod_{q=j}^n a_q = \left(\prod_{q=j}^k a_q \right) \cdot \left(\prod_{q=1}^n a_q \right) \quad (n < j \leq k);$$

$$\alpha_{jn}^{(p)}(s) = \begin{cases} \alpha_{jn}^{(p)}(s), & \text{если } j < p \leq n, \\ \alpha_{jk}^{(p)}(s) \alpha_{jn}^{(p)}(s) \beta(s), & \text{если } 1 \leq p \leq n < j \text{ или } n < j < p \leq k. \end{cases}$$

Пусть независимо от функционирования системы поступают „катастрофы“, поток которых пуассоновский с параметром $s > 0$.

Обозначим через $A_{jst}(t)$ условное событие, заключающееся в том, что в момент $t < i$, за время t поступали лишь вызовы, за длительности обслуживания которых не наступали „катастрофы“, при условии $\langle j \rangle$ в момент $t = 0$.

На основе лемм 1, 2 можно сформулировать лемму 3.

Лемма 3.

$$P(A_{jst}(t)) = a_n^{-1} \sum_{p=1}^k \alpha_{jn}^{(p)}(s) \cdot \exp \{ -[a_p - \alpha_{jk}^{(p)}(s) \cdot \beta(s)] \cdot t \}.$$

Если же $a_1 = \dots = a_k = a$, то

$$P(A_{jst}(t)) = e^{-at} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(at)^{k\bar{m}+n-j}}{(k\bar{m}+n-j)!} |\beta(s)|^{\bar{m}},$$

где

$$\bar{m} = \begin{cases} m, & \text{если } j \leq n, \\ m+1, & \text{если } n < j \leq k. \end{cases}$$

4°. В дальнейшем используется преобразование Лапласа по μ от функции $P(A_{j,n}(t))$, которое можно получить без использования леммы 3 введением дополнительного события (1).

Лемма 4. При $\operatorname{Re} s > 0, \operatorname{Re} \mu > 0$

$$\int_0^\infty e^{-\mu t} P(A_{j,n}(t)) dt = \alpha_{jn}(\mu, s) \cdot \left\{ 1 - \beta(s) \prod_{m=1}^k \frac{a_m}{\mu + a_m} \right\}^{-1}, \quad (1)$$

где

$$\alpha_{jn}(\mu, s) = \begin{cases} \frac{1}{\mu + a_n} \left(\prod_{m=1}^{n-1} \frac{a_m}{\mu + a_m} \right), & j \leq n, \\ \frac{\beta(s)}{\mu + a_n} \cdot \left(\prod_{m=1}^k \frac{a_m}{\mu + a_m} \right) \cdot \left(\prod_{m=1}^{n-1} \frac{a_m}{\mu + a_m} \right), & n < j \leq k. \end{cases}$$

Рассмотрим знаменатель правой части равенства (1)

$$\prod_{n=1}^k (\mu - s + a_n) = \beta(s) \cdot \prod_{n=1}^k a_n, \quad (2)$$

являющийся по μ многочленом степени k ($s > 0$).

Лемма 5. Все корни $\mu_r(s)$ ($r=1, k$) многочлена (2) по μ попарно различны, причем при $a_1 = \dots = a_k = a$

$$\mu_r(s) = s - a + a |\beta(s)|^{1/k} \cdot \left\{ \cos \frac{2\pi r}{k} + i \sin \frac{2\pi r}{k} \right\}.$$

Здесь $|\beta(s)|^{1/k}$ — арифметическое значение корня.

5°. Пусть порядок обслуживания вызовов — прямой. Обозначим через $w_{jl}(t)$ виртуальное время ожидания в момент t при условии $\langle l \rangle$, а через $\chi_{jl}(t)$ — характеристическую функцию события: „в момент t $\langle l \rangle$ “. Индекс j указывает на начальное условие $\langle l \rangle$ в момент $t=0$.

Обозначим через $P_{jm}(t)$ ($j, m = \overline{1, k}$) вероятность того, что в момент t система свободна от вызовов и $\langle m \rangle$.

Положим ($j, m = \overline{1, k}; \operatorname{Re} \mu > 0, \operatorname{Re} s > 0, t > 0$)

$$p_{jm}(\mu) = \int_0^\infty e^{-\mu t} P_{jm}(t) dt,$$

$$w_{jl}(s, t) = M \{ e^{-s w_{jl}(t)} \chi_{jl}(t) \}.$$

Лемма 6. а) $w_{jl}(s, t)$ определяются по формулам

$$w_{jl}(s, t) = e^{st} P(A_{jsi}(t)) - s \sum_{m=1}^k \int_0^t P_{jm}(u) e^{s(t-u)} P(A_{msi}(t-u)) du,$$

а функции $p_{jm}(\mu)$ удовлетворяют соотношениям

$$s \sum_{m=1}^k p_{jm}(\mu_n(s)) \cdot a_{mi}(\mu_n(s) - s, s) = a_{ji}(\mu_n(s) - s, s);$$

$$6) \quad \omega_{ji}(s, \mu) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^\infty e^{-\mu t} \omega_{ji}(s, t) dt = \\ = \left[1 - \beta(s) \prod_{n=1}^k \frac{a_n}{\mu - s + a_n} \right]^{-1} \cdot \left\{ a_{ji}(\mu - s, s) - s \sum_{m=1}^k p_{jm}(\mu) a_{mi}(\mu - s, s) \right\}.$$

6°. Прежде чем сформулировать основной результат, относящийся к случаю $a_1 = \dots = a_k = a$, приведем две леммы, используемые в теореме.

Лемма 7. Функции $\pi_n(\mu)$ ($n = \overline{1, k}$), определяемые из уравнений

$$\pi_n(\mu) = \beta^{1/k} (\mu + a - a\pi_n(\mu)) \exp \left(i \frac{2\pi n}{k} \right),$$

различны при любом $\mu \geq 0$.

Лемма 8. Пусть π_n ($n = \overline{1, k}$) — корни уравнения $z^k = \beta(a - az)$ внутри единичного круга. Тогда

а) если $\rho = \frac{a\beta}{k} \leq 1$, то $|\pi_1| < 1, \dots, |\pi_{k-1}| < 1, \pi_k = 1$;

б) если $\rho > 1$, то $|\pi_n| < 1$ ($n = \overline{1, k}$).

7°. Из леммы 6 в случае $a_1 = \dots = a_k = a$ удается получить следующую теорему.

Теорема. Если $a_1 = \dots = a_k = a$, то ($\text{Re } s > 0, \text{Re } \mu > 0$)

$$а) \quad \omega_{ij}^*(s, \mu) = \left[1 - \beta(s) \left(\frac{a}{\mu - s + a} \right)^k \right]^{-1} \times \\ \times \left\{ a_{ji}(\mu - s, s) - s \sum_{m=1}^k p_{jm}(\mu) a_{mi}(\mu - s, s) \right\},$$

где

$$p_m(\mu) = (-1)^{k+m} \sum_{r=1}^k \frac{f_{rm}(\mu) |\mu + a - a\pi_r(\mu)|^{-1}}{\prod_{\substack{l=1 \\ l \neq r}}^k |\pi_r(\mu) - \pi_l(\mu)|},$$

а $f_{rm}(\mu)$ есть сумма всевозможных произведений по $k-m$ из $k-1$ чисел $\pi_1(\mu), \dots, \pi_{r-1}(\mu), \pi_{r+1}(\mu), \dots, \pi_k(\mu)$.

б) При $\rho < 1$ существуют ($l = \overline{1, k}$)

$$\omega_l(s) = \lim_{\mu \rightarrow 0} \mu \omega_{il}^*(s, \mu) = -\frac{s}{a} \left[1 - \beta(s) \left(\frac{a}{a-s} \right)^k \right] \times \\ \times \left\{ \sum_{m=1}^l p_m \left(\frac{a}{a-s} \right)^{l-m+1} + \beta(s) \sum_{m=l+1}^k p_m \left(\frac{a}{a-s} \right)^{k-m+l+1} \right\},$$

$$p_m = (-1)^{k+m} \frac{(1-\rho)f_{km}}{\prod_{r=1}^{k-1} (1-\pi_r)}$$

а f_{km} есть сумма всевозможных произведений по $k-m$ из $k-1$ чисел $\pi_1, \dots, \pi_{k-1}$.

Вычислительный центр Академии наук Армянской ССР

Է. Ա. ԴԱՆԻՆՅԱՆ, Ռ. Ն. ԶԻՔՅԱՆ

Ապաստան ժամանակը $E_k|G|1|\infty$ սխտեմում

Անշխատանքում գիտարկվում է $E_k|G|1|\infty$ դանդաղացված սպասարկման սխեմում: Ներմտնող հոսքի երկու հաջորդական պահանջներով առաջացման մոմենտների միջև ընկած միջակայքը կազմված է k հատ անկախ էկսպոնենցիալ բաշխում ունեցող պատահական ժամանակներից (պահանջների առաջացման ֆազաներից): 1-րդ ֆազայի բաշխման պարամետր հավասար է $\alpha_l > 0$ ($l=1, k$) $l=0$ մոմենտը համապատասխանում է 1 ֆազային:

Պահանջի սպասարկման ժամանակի բաշխման ֆունկցիայի Լապլաս-Ստիլտեսի ձևափոխությունն է $\beta(s)$ -ը ($\text{Re } s \geq 0$):

Նշանակենք $W_j(x, t)$ -ով հավանականությունն այն բանի, որ t մոմենտին սպասման ժամանակը $< x$ և t մոմենտը համապատասխանում է j -րդ ֆազային:

Դիցուք

$$\omega_j(\mu, s) = \int_0^x e^{-\mu x} dx \int_0^\infty e^{-st} dW_j(x, t).$$

Խ ն ո Ր Ե Մ. Դիցուք $a_1 = \dots = a_k = a$: Այդ դեպքում

$$\omega_l(s, \mu) = \left[1 - \beta(s) \left(\frac{a}{\mu - s + a} \right)^k \right]^{-1} \left\{ \alpha_{1l}(\mu - s, s) - s \sum_{m=1}^k p_m(\mu) \alpha_{ml}(\mu - s, s) \right\},$$

որտեղ՝

$$p_m(\mu) = (-1)^{k+m} \sum_{r=1}^k \frac{f_{rm}(\mu) [\mu + a - a\pi_r(\mu)]}{\prod_{\substack{l=1 \\ l \neq r}}^k |\pi_r(\mu) - \pi_l(\mu)|}$$

$f_{rm}(\mu)$ -ն նաև դիսանում է $\pi_1(\mu), \dots, \pi_{m-1}(\mu), \pi_{m+1}(\mu), \dots, \pi_k(\mu)$ բոլորի բոլոր հնարավոր $k-m$ հատ ելմենտների արտադրյալների գումար, իսկ $\pi_n(\mu)$ -ն որոշվում է հետևյալ հավասարումներից ($n=1, k$)

$$\pi_n(\mu) = \beta^{1/n}(\mu + a - a\pi_n(\mu)) \exp\left(i \frac{2\pi n}{k}\right)$$

(i -ին կենդ ճեկն k)

$$\alpha_{jn}(\mu, s) = \begin{cases} \frac{1}{\mu + a_n} \left(\prod_{m=j}^{n-1} \frac{a_m}{\mu + a_m} \right), & 1 \leq j \leq n \leq k; \\ \frac{\beta(s)}{\mu + a_n} \left(\prod_{m=j}^k \frac{a_m}{\mu + a_m} \right) \left(\prod_{m=1}^{n-1} \frac{a_m}{\mu + a_m} \right), & 1 \leq n < j \leq k. \end{cases}$$

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ Г. П. Климов, Стохастические системы обслуживания, «Наука», М., 1966. ² Э. А. Даниелян, В. Г. Ушаков, ДАН Арм. ССР, т. 65, № 4 (1977).