ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
LXV 1977 2

УДК 519.48

МАТЕМАТИКА

Ю. М. Мовсисян

Группы автоморфизмов и квазиавтоморфизмов

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александряном 11/V 1977)

1. Пусть $Q(\cdot)$ произвольная группа с единичным элементом 1. Биективное отображение $\varphi: Q\to Q$ называется квазиавтоморфизмом группы $Q(\cdot)$, если для любых $x, y\in Q$ справедливо равенство

$$\varphi(x\cdot y)=\varphi x\cdot(\varphi 1)^{-1}\cdot\varphi y.$$

Каждый автоморфизм группы, очевидно, является ее квазиавтоморфизмом. В этом случае (и только в этом случае) справедливо равенство $\varphi 1=1$. Нетрудно проверить, что множество всех квазиавтоморфизмов заданной группы $Q(\cdot)$ образует группу. Обозначим ее через $KAut[Q(\cdot)]$. Группа всех автоморфизмов есть подгруппа в группе всех квазиавтоморфизмов.

Правые трансляции (отображения $R_a: x\to x\cdot a$) и левые трансляции (отображения $L_a: x\to a\cdot x$) группы являются ее квазиавтоморфизмами. Соответствие $a\to L_a$ есть вложение группы $Q(\cdot)$ в группу $KAut[Q(\cdot)]$. Группа $Q(\cdot)$ при этом вложении становится даже нормальным делителем.

Каждый квазиавтоморфизм φ группы $Q(\cdot)$ можно представить в виде

$$\varphi=R_a\alpha,\quad \varphi=L_a\alpha,$$

где α — автоморфизм группы $Q(\cdot)$ и $a\in Q$. Иначе говоря подгруппы $Q(\cdot)$ и $Aut[Q(\cdot)]$ совместно порождают группу $KAut[Q(\cdot]$. Поскольку отображение L_a является автоморфизмом группы $Q(\cdot)$ тогда и только тогда, когда $a=1$, то подгруппы $Q(\cdot)$ и $Aut[Q(\cdot)]$ обладают одноэлементным пересечением.

Соотношение

$$\alpha L_x\alpha^{-1}=L_{\alpha x},\quad \text{для } \alpha\in Aut[Q(\cdot)],\ x\in Q$$

означает, что каждый автоморфизм α группы $Q(\cdot)$ является сужением некоторого внутреннего автоморфизма группы $KAut[Q(\cdot)]$. Мы пришли к следующему результату.

Теорема 1. *Группа квазиавтоморфизмов $KAut[Q(\cdot)]$ является полупрямым произведением групп $Q(\cdot)$ и $Aut[Q(\cdot)]$, сверх того голоморф и группа квазиавтоморфизмов одной и той же группы всегда изоморфны.*

Можно дать и абстрактное определение понятия квазиавтоморфизма. Пусть $Q(\cdot)$ произвольная группа и $Aut[Q(\cdot)]$ есть ее группа автоморфизмов. Рассмотрим множество Φ всевозможных упорядоченных пар (α, a), где $\alpha\in Aut[Q(\cdot)]$ и $a\in Q$, умноженные по правилу

$$(\alpha, a)\cdot(\alpha', a') = (\alpha\alpha', \alpha a'\cdot a).$$

Относительно этого умножения множество Φ образует группу, изоморфную группе квазиавтоморфизмов $KAut[Q(\cdot)]$. В самом деле, если $\varphi\in KAut[Q(\cdot)]$, то существуют $\alpha\in Aut[Q(\cdot)]$ и $a\in Q$ такие, что

$$\varphi x = \alpha x\cdot a$$

причем элементы α и a определяются единственным образом. Если при этом

$$\varphi' x = \alpha' x\cdot a',$$

то

$$(\varphi\varphi')x = \varphi(\varphi' x) = \varphi(\alpha' x\cdot a') = \alpha(\alpha' x\cdot a')\cdot a = \alpha\alpha' x\cdot(\alpha a'\cdot a).$$

Соответствие $\varphi\to(\alpha, a)$ есть искомый изоморфизм.

2. Следуя ([1,2]), под автоморфизмом универсальной алгебры $D = \langle Q; \Sigma\rangle$ понимаем пару $(\varphi, \bar\psi)$ биективных отображений $\varphi: Q\to Q$, $\bar\psi:\Sigma\to\Sigma$ таких, что отображение $\bar\psi$ сохраняет арность операций и для любых $A\in\Sigma$, $|A| = n$ и $x_1, \ldots, x_n\in Q$ справедливо равенство

$$\varphi[A(x_1, \ldots, x_n)] = [\tilde\psi A](\varphi x_1, \ldots, \varphi x_n).$$

Аналогичные морфизмы для линейных пространств ранее были исследованы под названием полулинейных соответствий ([3,4]).

Совокупность всех автоморфизмов образует группу $AutD$. Автоморфизмы вида $(\varphi, \bar\varepsilon)$ называются главными,* их совокупность также образует группу, обозначаемую через $Aut^{(0)}D$ (это есть группа обычных автоморфизмов). Группа главных автоморфизмов $Aut^{(0)}D$ является нормальным делителем в группе всех автоморфизмов $AutD$.

Если

$$AutD = \{(\varphi_i, \bar\psi_j)\,|\,i\in I,\ j\in J\},$$

то

$$Aut^{(1)}D = \{\varphi_i\,|\,i\in I\}$$

и

$$Aut^{(2)}D = \{\bar\psi_j\,|\,j\in J\}$$

* Через $\bar\varepsilon$ обозначается тождественное отображение множества Σ.

также являются группами и называются, соответственно, первой и второй группой автоморфизмов алгебры D.

Лемма. *Первая группа автоморфизмов изоморфна группе всех автоморфизмов. Группа всех автоморфизмов являются расширением группы главных автоморфизмов при помощи второй группы автоморфизмов.*

Доказательство. Если $\varphi \in Aut^{(1)}D$, то существует $\bar{\psi} \in Aut^{(2)}D$ такое, что $(\varphi, \bar{\psi}) \in Aut D$. Легко заметить, что отображение $\bar{\psi}$ при этом определяется единственным образом. Поэтому соответствие $\varphi \to (\varphi, \bar{\psi})$ определено корректно, оно биективно и сохраняет произведение. Таким образом $Aut^{(1)}D \simeq Aut D$. Если же $(\varphi, \bar{\psi}) \in Aut D$, то соответствие $\varphi \to \bar{\psi}$ есть эпиморфизм группы $Aut^{(1)}D$ на группу $Aut^{(2)}D$ с ядром $Aut^{(0)}D$.

Можно показать, что группа всех автоморфизмов каждой свободной алгебры (в рассматриваемой категории универсальных алгебр) расщепляема как расширение группы главных автоморфизмов. Для линейных пространств этот факт был замечен Бэром ([4]). Группа всех автоморфизмов каждой булевой алгебры также расщепляема. Группа всех автоморфизмов алгебры слов есть полупрямое произведение симметрических групп.

Теорема 2. *Группа квазиавтоморфизмов $KAut[Q(\cdot)]$ является группой всех автоморфизмов некоторой производной алгебры группы $Q(\cdot)$.*

Доказательство. Пусть $Q(\cdot)$ исходная группа. Для любого натурального $n \geqslant 1$ рассмотрим n-арную производную операцию

$$A_a(x_1, \ldots, x_{2k-1}) = x_1 \cdot x_2^{-1} \ldots x_{2k-3} \cdot x_{2k-2}^{-1} \cdot a \cdot x_{2k-1},$$

$$\text{если} \quad n = 2k-1, \ a \in Q$$

$$A_a(x_1, \ldots, x_{2k}) = x_1 \cdot x_2^{-1} \ldots x_{2k-1} \cdot x_{2k}^{-1} \cdot a \cdot x_{2k},$$

$$\text{если} \quad n = 2k, \ a \in Q$$

Обозначим через $\sum_n$ класс всех n-арных производных операций вида A_a, т. е.

$$\sum_n = \{A_a \mid a \in Q, \ |A_a| = n\}$$

и вычислим первую группу автоморфизмов производной алгебры $D_n = \langle Q; \sum_n \rangle$.

Непосредственной проверкой можно убедиться, что каждый квазиавтоморфизм группы $Q(\cdot)$ содержится в первой группе автоморфизмов алгебры D_n. Пусть теперь $\varphi \in Aut^{(1)}D_n$ и $n = 2k$, тогда

$$\varphi[A_a(x_1, \ldots, x_{2k})] = [\bar{\psi} A_a](\varphi x_1, \ldots, \varphi x_{2k}),$$

$$\varphi(x_1 \cdot x_2^{-1} \ldots x_{2k-1} \cdot x_{2k}^{-1} \cdot a x_{2k}) = \varphi x_1 \cdot (\varphi x_2)^{-1} \ldots \varphi x_{2k-1} (\varphi x_{2k})^{-1} a' \varphi x_{2k}.$$

Если $x_1 = x_2 = \ldots = x_{2k}$, то

$$\varphi(a \cdot x_{2k}) = a' \varphi x_{2k}.$$

Если же $x_{2k} = 1$, то

$$a' = \varphi a \cdot (\varphi 1)^{-1}.$$

Таким образом,

$$\varphi(a \cdot x_{2k}) = \varphi a \cdot (\varphi 1)^{-1} \cdot \varphi x_{2k}$$

и поскольку $a \in Q$ есть произвольный элемент, то φ — квазиавтоморфизм группы $Q(\cdot)$.

Мы показали, что

$$Aut^{(1)} D_n = KAut[Q(\cdot)]$$

и в силу предыдущей леммы

$$Aut D_n \simeq KAut[Q(\cdot)].$$

Рассуждения для нечетных n аналогичны. Теорема доказана.

Вычислим теперь группу главных автоморфизмов n-арной алгебры D_n. При этом универсальная алгебра называется n-арной, если все ее операции n-арны. В частности 2-арная алгебра называется бинарной алгеброй, а 1-арная алгебра — унарной алгеброй.

В случае главных автоморфизмов имеем $a' = a$ для любого $a \in Q$.

$$a' = \varphi a \cdot (\varphi 1)^{-1} = a,$$

$$\varphi a = a \varphi 1,$$

$$\varphi = R_c,$$

где $c = \varphi 1$. Таким образом, группа главных автоморфизмов алгебры D_n совпадает с группой всех правых трансляций группы $Q(\cdot)$. Однако, соответствие $c \to R_c$ является антиизоморфизмом групп и поэтому $Q(\cdot) \simeq Aut^{(0)} D_n$.

Вычислим теперь вторую группу автоморфизмов алгебры D_n. Для любого $a \in Q$ имеем

$$\bar{\psi} A_a = A_{a'}, \quad \text{где} \quad a' = \varphi a \cdot (\varphi 1)^{-1}$$

Отображение $\bar{\psi}$ индуцирует биективное отображение $\psi : Q \to Q$ определенное по правилу $\psi(a) = a'$, являющиеся автоморфизмом группы $Q(\cdot)$. Соответствие $\bar{\psi} \to \psi$ является изоморфизмом группы $Aut^{(2)} D_n$ на группу $Aut[Q(\cdot)]$. Следовательно в следующей коммутативной диаграмме все строки и все столбцы точны:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & O & & O & & O & & \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
O & \to & Aut^{(0)} D_n & \to & Aut^{(1)} D_n & \to & Aut^{(2)} D_n & \to & O \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
O & \to & Q(\cdot) & \to & Hol[Q(\cdot)] & \to & Aut[Q(\cdot)] & \to & O \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 & & O & & O & & O & &
\end{array}$$

Итак, более полная формулировка предыдущей теоремы является

Теорема 3. *Каждое расширение групп вида $O\to Q\to HolQ\to AutQ\to 0$ изоморфно некоторому расширению вида $O\to Aut^{(0)}D\to Aut^{(1)}D\to Aut^{(2)}D\to O$. Алгебру D при этом можно выбрать произвольного типа.*

Будем говорить, что расширение групп

$$O\to A\to C\to B\to O \tag{*}$$

обладает представлением, если существует алгебра D такая, что расширение (*) изоморфно расширению групп вида

$$O\to Aut^{(0)}D\to Aut^{(1)}D\to Aut^{(2)}D\to O$$

Иначе говоря существуют изоморфизмы $A\to Aut^{(0)}D$, $C\to Aut^{(1)}D$ и $B\to Aut^{(2)}D$ такие, что коммутативна диаграмма:

$$\begin{tikzcd}
O \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[r] \arrow[d] & O \\
O \arrow[r] & Aut^{(0)}D \arrow[r] & Aut^{(1)}D \arrow[r] & Aut^{(2)}D \arrow[r] & O.
\end{tikzcd}$$

Последний результат (теорема 3) означает, что каждое расширение групп вида $O\to Q\to HolQ\to AutQ\to O$ обладает представлением.

Обладает ли каждое расширение групп представлением?

Этот вопрос в общем случае остается открытым, однако для полупрямого произведения двух групп утвердительный ответ дает следующая

Теорема 4. *Каждое расширение групп вида*

$$O\to A\to A\leftthreetimes B\to B\to O$$

обладает представлением.

Доказательство последней теоремы мы опускаем, из-за ее громоздкости.

* Ереванский государственный университет

ՅՈՒ. Մ. ՄՈՎՍԻՍՅԱՆ

Ավտոմորֆիզմների և քվազիավտոմորֆիզմների խմբեր

Որևէ $Q(\cdot)$ խմբի քվազիավտոմորֆիզմ ասելով հասկանում են այն բիեկտիվ $\varphi: Q\to Q$ արտապատկերումը, որը բավարարում է հետևյալ հավասարությանը՝

$$\varphi(x\cdot y)=\varphi x\cdot(\varphi 1)^{-1}\cdot\varphi y$$

ցանկացած $x, y\in Q$ էլեմենտների համար, որտեղ 1-ը հանդիսանում է տրված խմբի միավորը: Յուրաքանչյուր խմբի բոլոր քվազիավտոմորֆիզմների բազմությունը կազմում է խումբ:

Ներկա աշխատանքում տրվում է քվազիավտոմորֆիզմների խմբի տարբեր ներկայացումներ։ Մասնավորապես ամեն մի խմբի քվազիավտոմորֆիզմների խումբը իզոմորֆ է նրա հոլոմորֆին։ Հոդվածում մտցվում է նաև խմբային ընդլայնումների ներկայացման գաղափարը և ցույց է տրվում, որ հոլոմորֆը և կիսաուղիղ արտադրյալը (որպես ընդլայնումներ) օժտված են ներկայացումներով։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Ю. М. Мовсисян*, «Известия АН Арм. ССР», сер. Математика, № 6, 485—502 (1976). [2] *Ю. М. Мовсисян*, ДАН, Арм. ССР, т. LXII, № 4 (1976). [3] *Н. Джекобсон*, Строение колец, М., 1961. [4] *Р. Бэр*, Линейная алгебра и проективная геометрия, М., 1955