ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXIII 1976 3

УДК 681.39

МАТЕМАТИКА

С. Т. Карапетян

(x_0, m)-минимальный разрез и разбиение дерева

(Представлено академиком АН Армянской ССР С. Н. Мергеляном 2/IV 1976)

В работе используются понятия и определения из [1].
Пусть каждой вершине $x \in X$ и каждому ребру $s \in A$ графа $G(X, A)$ сопоставлены, соответственно, $b(x)$ и $c(s)$ натуральные числа, называемые весами.

Определение. Для фиксированной вершины $x_0 \in X$ и натурального числа m подмножество $X_0 \subseteq X$ называется (x_0, m)- множеством, если:

1) $x_0 \in X_0$; (1)

2) $b(X_0) = \sum\limits_{x \in X_0} b(x) = m$; (2)

3) подграф $G_0(X_0, A_0)$ — связанный. (3)

Определение. Разрезом некоторого подмножества $X' \subseteq X$ называется множество всех ребер с одним концом в X', другим — в $X \setminus X'$. Когда X' — (x_0, m)- множество, то его разрез E называется (x_0, m)-разрезом.

$c(E) = \sum\limits_{s \in E} c(s)$ — называется весом E. $c(E) = \infty$, если $X' = \varnothing$.

Определение. (x_0, m) — разрез с наименьшим весом называется (x_0, m)- минимальным разрезом.

Задача. *В графе $G(X, A)$ найти (x_0, m) — минимальный разрез.*

Как следует из (1), (2) в общем случае, когда $b(x_0) = d$ множество (x_0, m)-разрезов совпадает с множеством $(x_0, m - d + 1)$-разрезов, когда $b(x_0) = 1$. Удобно предположить $b(x_0) = 1$.

Поставленную задачу решим для дерева $D(X, A)$ с корнем x_0. В [2] задача сформулирована в виде целочисленной задачи линейного программирования.

Каждое ребро $s = (x, y) \in D$ является разделяющим [1], т. е. после удаления s дерево разбивается на два дерева. Одно из них содержит вершины x_0, x (обозначается $D(x, x_0)$), другое содержит y, не содержит x_0 (обозначается $D(y, \bar{x}_0)$).

Цепь с концами x, y обозначим $W(x, y)$ и назовем полной, если $x \equiv x_0$ и y—концевая вершина. Полная цепь обозначается W_y, множество вершин цепи $W(x, y)$ символом—$\{x, y\}$. Пусть $K = \{W_z\}$—множество полных цепей и $|K| = q$. Взаимно однозначное соответствие $\varphi : K \to N = (1, \ldots, q)$ назовем нумерацией K.

Для всякого φ (для упрощения считаем $\varphi(W_i) = i$) обозначим

$$W_0 = W_{q+1} = \varnothing.$$

$$V_i = W_i \setminus W_i \cap W_{i-1}, \ (i = 1, \ldots, q+1).$$

$$\bar{V}_i = W_{i-1} \setminus W_i \cap W_{i-1}, \ (i = 1, \ldots, q+1).$$

V_i называется i-ой ветвью, а $\bar{V}_i$ — i-ой сопряженной ветвью нумерации φ.

Если $\bar{\varphi}(W_i) = q - \varphi(W_i) + 1$ (т. е. $\bar{\varphi}^{-1}(i) \equiv \varphi^{-1}(q - i + 1)$), то i-я сопряженная ветвь (i-я ветвь) нумерации φ является $(q - i + 2)$-ой ветвью ($(q - i + 2)$-ой сопряженной ветвью) нумерации $\bar{\varphi}$. φ называется допустимой, если

$$i < j \Rightarrow W_i \cap W_{i+1} \supseteq W_i \cap W_j, \quad (i, j \in N).$$

Из допустимости φ следует допустимость $\bar{\varphi}$.

Для допустимых нумераций верно

$$V_i \cap V_j = \varnothing \quad (i \neq j); \tag{A}$$

$$\bar{V}_i \cap \bar{V}_j = \varnothing \quad (i \neq j). \tag{B}$$

Ввиду вышеизложенного из (A) следует (B) и наоборот. Докажем (A). При $j = i - 1$ утверждение очевидно. Пусть $p \geqslant l + 2$ и $s \in V_l \cap V_p$. Тогда $s \in W_l \cap W_p$ и так как $W_l \cap W_{l+1} \supseteq W_l \cap W_p$ $(i = l, \ldots, p-2)$, то $s \in W_{l+1}$. В частности $s \in W_{p-1}$. А это невозможно, поскольку $V_p \cap W_{p-1} = \varnothing$.

Легко также убедиться, что $\bigcup\limits_{i=1}^{r} V_i = \bigcup\limits_{i=1}^{r} W_i$ $(1 \leqslant r \leqslant q)$.

Следовательно, для допустимой нумерации φ справедлива

Теорема 1. *$V(r) = \{V_1, \ldots, V_r\}$ - есть разбиение множества цепей дерева $D(r) = \bigcup\limits_{i=1}^{r} W_i$.*

Заметим, что $V_{q+1} = \varnothing$ и $D(q) = D$.

Теорема 2. *Если $D(\varphi)$ число допустимых нумераций D, то $D(\varphi) \geqslant q$.*

Обозначим $\varphi_1^{-1}(1) = W_t$, где W_t—некоторая произвольная полная цепь. Пусть нумерация φ_r r-допустимая, т. е. $\varphi_r : K_r \subseteq K \to N_r = (1, \ldots, r)$ такая, что какое бы не было соответствие $\varphi_{N-r} : K \setminus K_r \to N - N_r$, φ_r удовлетворяет условию допустимости при $i \in N_r$, $j \in N$. Если $\varphi_r^{-1}(r) = W_x$ и $x' \in \{x_0, x\}$ начиная от x первая вершина, смежная $y' \in D \setminus D(r)$, то ясно, что $W_x \cap W_z \supseteq W_x \cap W_{z'}$, где $z \in D(y', \bar{x}_0)$, $W_z \in D \setminus D(r)$. Следовательно, нумерация

$$\varphi_{r+1}(W_u) = \begin{cases} \varphi_r(W_u), & W_u \in K_r \\ r+1, & W_u = W_z. \end{cases}$$

$(r+1)$ — допустимая и $K_{r+1} = K_r \cup \{W_z\}$. После q-шагов получим $\varphi_q = \varphi$ допустимая нумерация K. Остальное следует из произвольности $\varphi_1^{-1}(1)$.

При таких обозначениях

$$\bar{V}_{r+1} = W(x', x), \quad V_{r+1} = W(x', z). \tag{4}$$

Вершина x' называется общей вершиной $\bar{V}_{r+1}$ и V_r, а (x', y') — начальным ребром V_{r+1}. Если $\bar{V}_l \setminus V_l = \varnothing$, то $x' = x_0$. Ниже полные цепи рассматриваются пронумерованными некоторой допустимой нумерацией φ. По следующему правилу для каждого ребра $s \in D$ определим число $\lambda(s)$:

$-\lambda(s) = 0$, s — начальное ребро цепи V_l.

—если $s_1 = (x_1, x)$, $s_2 = (x, x_2)$ соседние ребра в цепи V_l, то $\lambda(s_2) = \lambda(s_1) + b(x)$.

Фактически, если $s = (x, y) \in V_l$ и x' общая вершина V_l, $\bar{V}_l$, то

$$\lambda(s) = \sum_{t \in \{x', x\}} b(t) - b(x').$$

Можно предположить, что если $s = (x, y) \in D$ концевое ребро и y — концевая вершина, то

$$\lambda(s) \leqslant m-1, \quad \lambda(s) + b(y) \geqslant m. \tag{5}$$

Тогда $\lambda(s') < m-1$ для любого $s' \in D$.

Пусть W_z некоторая полная цепь и $x \in \{x_0, z\}$. Из (1) и (3) следует, что всякое (x_0, m)—множество X_0 обладает свойством

$$x \in X_0 \Rightarrow \{x_0, x\} \subseteq X_0; \quad x \notin X_0 \Rightarrow \{x, z\} \subseteq \bar{X}_0. \tag{6}$$

Теперь допустим, что для $s = (x, y) \in V_p$ концевого ребра не выполняется (5). Рассмотрим возможные случаи:

а) $\lambda(s) > m-1$.

Ясно, что в V_p существуют такие $s_1 = (z_1, z)$, $s_2 = (z, z_2)$ соседние ребра, что $\lambda(s_1) \leqslant m-1$, $\lambda(s_2) > m-1$. Тогда, если $Z' = \{x_0, z\}$, то $b(Z') > m$. Ввиду (6), любое (x_0, m)—множество не содержит вершину z и, следовательно, ни одну вершину из $D(z, \bar{x}_0)$ (в частности z_2). Если это так, то можно $D(z, \bar{x}_0)$ рассмотреть как одну, сжатую в z концевую вершину z' с весом $b(z') \geqslant m$. При этом для концевого ребра (z_1, z') выполняется (5).

б) $\lambda(s) + b(y) < m$.

Введем фиктивную концевую вершину y' с весом $b(y') \geq m$ и фиктивное концевое ребро $s=(y, y')$ с весом $c(s')=0$ и $\lambda(s')=\lambda(s)+b(y)$. Получим дерево D'. Ясно, что если E' (x_0, m)—разрез в D', то $E=E' \setminus E_ф$, где $E_ф$ множество фиктивных ребер, является (x_0, m)—разрезом в дереве D, причем $c(E)=c(E')$.

Теорема 3. *Множество ребер $E \subseteq A$ является $(x_0 m)$—разрезом тогда и только тогда, когда*

$$|E \cap W_r|=1, \quad (r=1, \ldots, q).$$

$$\lambda(E)=\sum_{s \in E} \lambda(s)=m-1.$$

Достаточность. Определим $D_0(X_0, A_0)$:

$$E \cap W_r=(x, y) \Longrightarrow W(x_0, x) \subseteq D_0 \,\&\, D(y, \bar{x}_0) \subseteq D_0, \quad (r=1, \ldots, q).$$

D_0 удовлетворяет (1), (3) и E является разрезом X_0. Из дерева $D(i)$ множеством $E_i=D(i) \cap E$ порождается

$$X_i=\bigcup_{(x_j, y_j) \in E_i} \{x_0, x_j\} \subseteq X_0.$$

Пусть $E_1=(x_1, y_1) \in W_1$. Тогда $X_1=\{x_0, x_1\}$ и

$$b(X_1)=b(x_0)+\{\sum_{z \in X_1} b(z)-b(x_0)\}=1+\lambda(x_1, y_1),$$

или $b(X_1)=\lambda(E_1)+1$.

Теперь допустим $b(X_r)=\lambda(E_r)+1$. Когда $E \cap W_{r+1}=(x_p, y_p) \bar{\in} V_{r+1}$, то $E_{r+1} \equiv E_r$ и $X_{r+1} \equiv X_r$. А если $(x_p, y_p) \in V_{r+1}$ и x' общая вершина V_{r+1}, $\bar{V}_{r+1}$, то $E_{r+1}=E_r \cup \{x_p, y_p\}$ и $X_{r+1}=X_r \cup \{x', x_p\} \setminus \{x'\}$. В обоих случаях $b(X_{r+1})=\lambda(E_{r+1})+1$. Следовательно, для $E=E_q$ имеем

$$b(X_0)=\lambda(E)+1=m.$$

Необходимость. Пусть X'—(x_0, m)-множество и E его разрез. Из (6) следует, что $|E \cap W_i| \leqslant 1$. С другой стороны $|E \cap W_i|=0$ означает $\bar{X}=\{x_0, y\} \subseteq X'$, где y—концевая вершина. Но, поскольку $b(\bar{X})>\lambda(s)+b(y) \geqslant m$, то $y \bar{\in} X'$. Значит $|E \cap W_i|=1$.

Как видно из свойства (6) X' совпадает с вышеопределенным множеством X_0. Следовательно $\lambda(E)=b(X')-1=m-1$.

Замечание. Теорема верна для (x_0, k) разреза при $k \leqslant m$. В случае $k>m$ надо предположить, что если $s=(x, y)$ концевое ребро, то $\lambda(s)+b(y) \geqslant k$.

Для каждого ребра $s \in D$ и каждой цепи $\bar{V}_r$ соответственно введем функции $T(s, k)$, $L(\bar{r}, k)$, первоначально принимая

$$L(\bar{1}, k)=T(\varnothing, k)=\begin{cases} 0, & \text{если } k=1 \\ \infty, & \text{если } 1<k \leqslant m. \end{cases}$$

Если для всех ребер $\bar{s} \in \bar{V}_r$ определены $T(\bar{s}, k)$, то

$$L(\bar{r}, k)=\min_{\bar{s} \in \bar{V}_r}\{T(\bar{s}, k)\}, \quad k=1, \ldots, m.$$

При этом $T(s, k)$ для $s \in V_r$ определяется

$$T(s, k) = \begin{cases} \infty, & \text{если } k \leqslant \lambda(s) \\ L(\bar{r}, k - \lambda(s)) + c(s), & \text{если } \lambda(s) < k \leqslant m \end{cases}$$

Обозначим $E(s, k)$ множество тех (x_0, k)-разрезов дерева $D(i)$, которые содержат ребро $s \in W_i$.

Лемма 1. *В дереве* $D(r)$, $(1 \leqslant r \leqslant q)$ *для любого* $s \in W_r$ и $1 \leqslant k \leqslant m$

$$\min_{E' \in E(s,k)} c(E') = T(s, k).$$

В случае $E(s, k) = \varnothing$ считаем $\min\limits_{E' \in E(s,k)} c(E') = \infty$.

Простой проверкой убедимся в справедливости леммы для $D(1)$. Допустим она верна для $D(r-1)$, $(r > 1)$ и рассмотрим $D(r)$. По определению $E(s, k) - s \in W_r$. Если $s \bar{\in} V_r$, то $s \in W_{r-1} \cap W_r$, т. е $s \in W_{r-1}$. Значит множество $E(s, k)$ для $D(r)$ и $D(r-1)$ одинаково и лемма, по предположению, доказана. Пусть $s \in V_r$, $E_0 \in E(s, k)$, $1 \leqslant k \leqslant m$. Тогда $\bar{E} = E_0 \setminus \{s\}$ $(x_0, k - \lambda(s))$ — разрез в дереве $D(r-1)$ и, по теореме 3, из W_{r-1} содержит ребро $\bar{s} \in W_{r-1} \setminus W_r \cap W_{r-1} = \bar{V}_r$. Обозначая $\bar{k} = k - \lambda(s)$, имеем:

$$\min_{E' \in E(s,k)} c(E') = \min_{\bar{s} \in \bar{V}_r} \left\{ \min_{E'' \in E(\bar{s}, \bar{k})} c(E'') \right\} + c(s) = \min_{\bar{s} \in \bar{V}_r} \left\{ T(\bar{s}, \bar{k}) \right\} + c(s) =$$

$$= L(\bar{r}, \bar{k}) + c(s) = T(s, k).$$

Лемма доказана.

Для каждого ребра $s \in D$ и каждой сопряженной ветви $\bar{V}_r$ соответственно введем функции $t(s, k)$, $l(\bar{r}, k)$, $(k = 1, \ldots, m)$:

$l(\bar{1}, k) = \varnothing$, при $1 \leqslant k \leqslant m$.

А если $r > 1$, то

$$l(\bar{r}, k) = \begin{cases} \varnothing, & \text{если } L(\bar{r}, k) = \infty. \\ \bar{s}, & \text{если } L(\bar{r}, k) < +\infty, \end{cases}$$

где $\bar{s} \in \bar{V}_r$ ребро, при котором $L(\bar{r}, k)$ достигает своего минимума. Тогда $t(s, k)$ для $s \in V_r$ определяется:

$$t(s, k) = l(\bar{r}, k - \lambda(s)).$$

Пусть $s_0 \in W_r$ и $1 \leqslant k_0 \leqslant m$. Как следует из леммы $E(s_0, k_0) = \varnothing$ при $T(s_0, k_0) = \infty$. Рассмотрим случай $T(s_0, k_0) < +\infty$.

Следующим образом определим множество E:

$$\begin{gathered} -s_0 \in E,\ t(s_0, k_0) = s_1 \in E, \\ -s_i \in E \,\&\, s_i \neq \varnothing \Rightarrow t(s_i, k_i) = s_{i+1} \in E, \end{gathered} \tag{7}$$

где $k_i = k_0 - \sum_{h=0}^{i-1} \lambda(s_h)$.

По определению функции $l(s, k)$ для $s_i \in E$ $(i = 1, \ldots)$ имеем:

а) $s_i \in \overline{V}_{f_i}$, причем из $i < j$ следует $f_i > f_j$. Значит $\exists i = p > 0 / s_{p-1} \neq \varnothing \,\&\, s_p = \varnothing$.

б) $T(s_i, k_i) = T(s_{i+1}, k_{i+1}) + c(s_i), \quad i = 0, \ldots, p-1.$ (8)

Так как $T(s_0, k_0) < +\infty$, то $T(s_{i+1}, k_{i+1}) < +\infty, \quad i = 0, \ldots, p-1$, следовательно $s_p \in \overline{V}_1$ и $T(s_p, k_p) = 0$. Тогда $k_p = 1$ или $k_0 - \sum_{i=0}^{p-1} \lambda(s_i) = 1$, т. е. для $E_0 = E \setminus \{s_p\}$ имеем:

$$\lambda(E_0) = k_0 - 1.$$

Из а) также следует, что $|E_0 \cap W_i| \leqslant 1$, $(1 \leqslant i \leqslant r)$. Когда $s_j \overline{\in} W_d$ и $s_j \in W_{d+1}$, то $s_{j+1} \in \overline{V}_{d+1} \subseteq W_d$. Это означает, что $|E_0 \cap W_i| \geqslant 1$, следовательно $|E_0 \cap W_i| = 1$. Кроме того из (8) получаем:

$$T(s_0, k_0) = \sum_{i=0}^{p-1} c(s_i),$$

т. е. $c(E_0) = T(s_0, k_0)$. Таким образом:

Лемма 2. *E_0 минимальный разрез в $E(s_0, k_0)$.*

Из леммы 1, 2 непосредственно следует

Теорема 4. *В дереве D существует (x_0, m)-разрез тогда и только тогда, когда*

$$T(s_0, m) = \min_{s \in W_q} \{T(s, m)\} < +\infty.$$

При этом $E_0 = E \setminus \{s_p\}$, где E определяется по правилу (7), является (x_0, m)-минимальным разрезом дерева D и $c(E_0) = T(s_0, m)$.

Описание алгоритма. Пусть для $s \in W_{r-1}$ определена $T(s,k)$, $(k = 1, \ldots, m)$. ($T(s, k)$ для $W_0 = \varnothing$ определяется указанным образом).

1. По указанному способу (4) найти $\overline{V}_r$ и V_r.
2. Вычислить $L(\overline{r}, k)$ и определить $l(\overline{r}, k)$.
3. Если $V_r = \varnothing$, то перейти к п. 7.
4. Для $s \in V_r$ вычислить $\lambda(s)$ и определить цепь V_r', концевое ребро которой удовлетворяет (5).
5. Для $s \in V_r'$ вычислить $T(s, k)$ и определить $l(s, k)$.
6. Если x — концевая вершина V_r', то обозначить $W_r = W(x_0, x)$ и повторить цикл для W_r.
7. По правилу (7) определить E_0, $(k_0 = m,\ s_0 = l(\overline{q+1}, m))$.

Для каждого ребра выполняется $(m+1)$ сравнений и $(m+1)$ сложений. Значит, всего требуется вычисление порядка — $2mn$, где $n = \sum_{r=1}^{q} |V_r'| \leqslant mq$.

При реализации на ЭВМ необходимо сохранить все $l(s, k)$ $s \in D$, $(k = 1, \ldots, m)$, для чего требуется $m \cdot n$ единица памяти. Кроме того в текущем цикле алгоритма для определения $L(\bar{r}, k)$, $l(\bar{r}, k)$, $T(s, k)$ максимум требуется, соответственно $-m+m+m^2$—единиц памяти.

Определение. $X_0 \subseteq X$ называется $x_0(m)$-множеством, а его разрез $x_0(m)$-разрезом, если для X_0 выполняется (1), (3) и

$$b(X_0) \leq m.$$

Пусть $E=\{E_1, \ldots, E_m\}$, где E_i—(x_0, i)—минимальный разрез дерева D. Понятно, что, если

$$L(\overline{q+1}, m_0) = \min_{1 \leq i \leq m} \{L(\overline{q+1}, i)\},$$

то E_{m_0}—минимальный в E и значит $x_0(m)$—минимальный разрез этого же дерева.

Как легко убедиться, задача о ранце является задачей нахождения $x_0(k)$-множества с минимальным разрезом в дерево-звезде с центром x_0 и $b(x_0)=0$. В этом случае $m=k+1$, $n \leq 2q$ и q—размерность задачи о ранце.

В [2] требуется в дереве $D(X, A)$ найти разбиение $R(X)=(X_1, \ldots)$ с ограничением

$$b(X_i) \leq m, \ (X_i \in R(X))$$

и с критерием минимизации

$$c(R),$$

где символом $c(R^1)$ обозначена сумма весов внешних ребер при разбиении R^1.

Показано, что эта задача сводится к нахождению $x_0(m)$-минимального разреза для всех $x \in D$. Каждое ребро может содержаться, максимум в m (x_0, m)—минимальных разрезах. Значит для него выполняется $2m^2$ операций, и если n—число ребер дерева (т. е. $n=|X|-1$), то для *оптимального разбиения* дерева требуется вычисление порядка—$2m^2n$.

Ереванский научно-исследовательский институт математических машин

Ս. Թ. ԿԱՐԱՊԵՏՅԱՆ

(x_0, m)-մինիմալ կտրվածք և ծառերի տրոհում

Հոդվածը նվիրված է հետևյալ խնդրի լուծմանը։

Տված է $D(X, A)$ *ծառը, որի գագաթներին և կողերին համապատասխանության մեջ է դրված որևէ բնական թիվ (կշիռ)։*

Պահանջվում է ծառից անջատել այնպիսի $D_0(X_0, A_0)$ *ենթածառ, որը պարունակի տված* x_0 *գագաթը,* X_0*-ին պատկանող գագաթների կշիռների գումարը չանցնի տված* m *թվից, իսկ այն կողերի կշիռների գումարը, որոնց մի գագաթը պատկանում է* X_0*-ին, իսկ մյուսը՝* $X \setminus X_0$*-ին, լինի մինիմալ։*

Խնդիրը լուծվում է դինամիկ ծրագրավորման մեթոդով։ Գործողությունների քանակը m^2q *կարգի է, որտեղ* q*-ն ծառի կախված գագաթների քանակն է։*

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *О. Оре*, Теория графов, изд. «Наука», 1968. [2] *С. Т. Карапетян*, «Вопросы радиоэлектроники», серия ЭВТ, вып. 6, стр. 82—87, (1975).