ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXI 1975 1

УДК 519.1

МАТЕМАТИКА

Ж. Г. Никогосян

О разложении графов на минимальное число остовных лесов*

(Представлено академиком АН Армянской ССР С. Н. Мергеляном 29/V 1975)

Пусть $G=(X, U)$ — обыкновенный связный граф и $|X|=p$. Суграф T графа G называется каркасом для графа G, если T связен и не имеет циклов. Скажем, что граф $G=(X, U)$ разлагается на минимальное число остовных лесов $T_i=(X, U_i)$, $i=1, 2, \ldots, k$, если $U=\bigcup_{i=1}^{k} U_i$, $\forall i, j\in\overline{1, k}$ $(i\neq j => U_i\cap U_j=\Phi)$, каждый суграф T_i является лесом и k — минимальное число, удовлетворяющее этому свойству. Число k называется древесностью графа G и обозначается через $r(G)$.

Пусть $G'=(X', U')$ — часть графа $G=(X, U)$ и $u\in U$. Обозначим через $G'(u)$ часть графа G, множество ребер которого состоит из всех ребер графа G', каждый из которых принадлежит некоторой простой цепи l, состоящая из ребер графа G' и соединяющая концы ребра u.

Обобщив это определение, для частей G' и G'' графа G обозначим

$$G'(G'')=\bigcup_{u\in G''} G'(u)$$

Если в графе $H=(Y, V)$ имеются реберно непересекающиеся части $H_1=(Y_1, V_1)$ и $H_2=(Y_2, Y_2)$ и $v_1\in V_1$, $v_2\in V_2$, то заменой ребер v_1 и v_2 в частях H_1 и H_2 назовем следующую операцию

$$H_1=(Y_1, (V_1/\{v_1\})\cup\{v_2\}), \quad H_2=(Y_2, (V_2/\{v_2\})\cup\{v_1\}).$$

Условимся, после этой операции, части H_1 и H_2 обозначать прежними символами.

Опишем алгоритм A для выделения из графа максимального числа каркасов попарно без общих ребер.

Пусть $G=(X, U)$ — обыкновенный связный граф. Выделим из графа G некоторый каркас $T_1=(X, U_1)$. Если граф $G^{(1)}=(X, U/U_1)$ связен, то из $G^{(1)}$ выделим второй каркас $T_2=(X, U_2)$. Предположим, что таким образом мы из графа G последовательно выделили каркасы $T_i=(X, U_i)$, $i=1, 2, \ldots, m$. Пусть компонентами связности получен-

* В настоящей статье мы придерживаемся терминологий и обозначений, принятых в ([1]) и ([2]).

ного несвязного графа $G^{(m)}=(X, \bigcup_{i=1}^{t} U_i)$ являются $G_i^{(m)}=(X_i, U_i^{(m)})$, $i=1, 2, \ldots, t$. Если $G^{(m)}$ не содержит циклов, то очевидно, что число выделенных каркасов максимально. Пусть некоторая компонента связности графа $G^{(m)}$, скажем $G_1^{(m)}$, содержит циклы. В графе $G_1^{(m)}$ возьмем один простой цикл C_1. Рассмотрим граф G и предположим, что он разложен на части $T_1, T_2, \ldots, T_m, G^{(m)}$. Легко проверить, что граф $G_1^{(m)}(C_1)=P_1$—блок. Обозначим

$$\bigcup_{j=1}^{m} T_j(P_i)=Q_i, \quad G_1^{(m)}(Q_i)=P_{i+1}, \quad i=1, 2, \ldots .$$

Предположим, что граф Q_h выходит за пределы множества X_1, где $h\geq 1$—наименьшее число с таким свойством. Из построения множеств P_i и Q_i следует, что существует последовательность ребер

$(x_1, y_1)\in P_1, (x^1, y^1), (x_2, y_2), (x^2, y^2), \ldots, (x_k, y_k)=u, (x^k, u^k)=v$, где

$$\forall i\in\overline{1, k}, \quad \exists k(i)\in\overline{1, m}, \quad ((x^i, y^i)\in T_{k(i)}(x_i, y_i)) \text{ и } \forall i\in\overline{1, k-1},$$

$$((x_{i+1}, y_{i+1})\in G_1^{(m)}(x^i, y^i)), \quad x^k\in X_1, \quad y^k\overline{\in} X_1.$$

При $i=1, 2, \ldots, k$ заменим ребра (x_i, y_i) и (x^i, y^i) в частях P_i и Q_i. Легко проверить, что каркасы $T_1, T_2, \ldots, T_m$ после этой операции остаются каркасами и число компонент связности графа G^m уменьшится. Описанный алгоритм обозначим через $\mathfrak{X}\mathfrak{G}$.

Предположим, что для всех чисел $i=1, 2, \ldots$ части P_i и Q_i графа G находятся в компоненте связности X_1. Граф

$$\bigcup_i (P_i \cup Q_i)=(\bar{X}_1, \bar{U}_1)=\bar{G}_1$$

назовем предельным графом, а множество $\bar{X}_1\subseteq X_1$ —предельным множеством.

Если в графе $G^{(m)}$ существует цикл C_2, не имеющий общих ребер с предельными графами, то применим на C_2 алгоритм $\mathfrak{X}\mathfrak{G}$. Тогда, либо уменьшится число компонент связности $G^{(m)}$, либо на множестве X возникнет новый предельный граф и т. д. Если останется одна компонента связности, то выделим следующий каркас. Пусть из графа G выделены каркасы $T_1, T_2, \ldots T_m, \ldots, T_k$, оставшаяся часть $G^{(k)}$ графа G разложена на компоненты связности $G_1^{(k)}=(X_1^{(k)}, U_1^{(k)}), \ldots, G_r=(X_r^{(k)}, U_r^{(k)})$, $r\geq 2$ и алгоритм $\mathfrak{X}\mathfrak{G}$ больше невозможно применить. Тогда, всякий граф $G_i^{(k)}$, $i\in\overline{1, r}$ или ациклический, или в $G^{(k)}$ имеются предельные графы $\bar{G}_i=(\bar{X}_i, \bar{U}_i)$, $i=1, 2, \ldots, s$, вне которых не существует циклов. Весь этот алгоритм, состоящий из последовательного применения алгоритма $\mathfrak{X}\mathfrak{G}$, обозначим через A.

Теорема 1. *Алгоритм A выделяет из графа максимальное число каркасов попарно без общих ребер.*

Доказательство. Докажем два вспомогательных утверждения.

Л е м м а 1. *Если $\overline{G}$ — предельный граф, то для любых различных двух вершин x, y $\overline{G}$, простая цепь, соединяющая вершины x, y и состоящая из ребер каркаса T_i, где $i \in \overline{1, k}$, лежит в предельном графе.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $\overline{G}$ связен, то в $\overline{G}$ существует простая цепь $l(x, y)$ соединяющая вершины x, y. Если на цепи $l(x, y)$ есть ребра из $G^{(k)}$, то их заменим цепями из T_i, замыкающих концы x и y, которые по построению $\overline{G}$, входят в $\overline{G}$. Полученная цепь состоит из ребер T_i. Лемма доказана.

Аналогично можно доказать следующую лемму:

Л е м м а 2. *Если $\overline{G}$ — предельный граф, то для любых двух различных вершин x, $y \in \overline{G}$, всякая простая цепь, соединяющая вершины x, y и состоящая из ребер графа $G^{(k)}$, лежит в $\overline{G}$.*

Из леммы 1 следует, что те части каркасов T_1, T_2, ..., $T_{(k)}$, которые лежат на предельном графе, сами являются каркасами для предельного графа.

Из леммы 2 следует, что в предельном графе существует каркас, состоящий из ребер графа $G^{(k)}$.

Предположим, что теорема 1 не верна, т. е. граф G имеет каркасы T_1', T_2', ..., T_k' попарно без общих ребер и после выделения их, оставшаяся часть $G^{(k)'}$ связна. Пусть $\overline{X}_1$, $\overline{X}_2$, ..., $\overline{X}_s$ — предельные множества в $G^{(k)}$.

Обозначим $\quad \overline{X} = X / \bigcup_{i=1}^{s} \overline{X}_i$,

$$Q_1 = \{u = (x, y) \in G^{(k)} / x, y \overline{\in} \overline{X}\}, \quad \overline{Q}_1 = \{u = (x, y) \in G^{(k)} / u \overline{\in} Q_1\}$$
$$Q_2 = \{u = (x, y) \in G^{(k)'} / x, y \overline{\in} \overline{X}\}, \quad \overline{Q}_2 = \{u = (x, y) \in G^{(k)'} / u \overline{\in} Q_2\}.$$

Каждое множество $\overline{X}_i$, $i = 1, 2, \ldots, s$ в графах $G^{(k)}$ и $G^{(k)'}$ стянем в одну вершину. Получим $(/\overline{X}/ + s)$ — вершинные графы H_1 и H_2, соответствующие графам $G^{(k)}$ и $G^{(k)'}$, и имеющие множества ребер $\overline{Q}_1$ и $\overline{Q}_2$ соответственно. Так как H_1 — ациклический и несвязен, то $|\overline{Q}_1| < |\overline{X}| + s - 1$. Граф H_2 связен, следовательно $|\overline{Q}_2| \geqslant |\overline{X}| + s - 1$ и значит $|\overline{Q}_1| < |\overline{Q}_2|$. Из леммы 1 следует, что $|Q_1| \leqslant |Q_2|$. Так как $|Q_1| + |\overline{Q}_1| = |Q_2| + |\overline{Q}_2|$, то $|Q_1| \geqslant |\overline{Q}_2|$, что является противоречием. Теорема 1 доказана.

Если L_1 и L_2 — предельные графы и имеют общие вершины, то легко проверить, что для графа $L_1 \cup L_2$ выполняются утверждения лемм 1 и 2. В этом смысле граф $L_1 \cup L_2$ также назовем предельным. Следовательно, можно предполагать что предельные графы не пересекаются по вершинам.

Опишем алгоритм D.

Применим к графу G алгоритм A. Пусть из графа G выделены каркасы $T_1, T_2, \ldots, T_k$ и граф G имеет предельные графы $\overline{G}_1 = (\overline{X}_1, \overline{U}_1), \ldots$,

$\overline{G}_s=(\overline{X}_s, \overline{U}_s)$. Применим над графами $\overline{G}_i$, $i=1, 2, \ldots, s$ алгоритм A. Если внутри их возникнут новые предельные графы, то снова применим над ними алгоритм A и т. д., пока не возникнут новые предельные графы. Разложим граф G на леса следующим образом. В качестве первых k членов разложения возьмем каркасы $T_1, T_2, \ldots T_k$. Из леммы 2 следует, что на предельных множествах X_i, $i=1, 2, \ldots, s$ существуют по одному каркасу T_i, $i=1, 2, \ldots, s$, состоящему из ребер графа $G^{(k)}$. Очевидно, что $T'=\bigcup\limits_{i=1}^{r} T_i'$ — лес. Возьмем часть T'' графа $G^{(k)}$, ребра которой имеют общие вершины с множеством $x/\bigcup\limits_{i=1}^{s}\overline{X}_i$. Легко проверить, что граф $T_{k+1}=T'\bigcup T''$ — ациклический. Лес T_{k+1} будем считать $(k+1)$ — ым членом разложения. Из графа $G^{(k)}$ выделив лес T_{k+1}, получим граф $G^{(k+1)}$, из которого аналогично можно выделить лес T_{k+2} и т. д. Через некоторое число шагов G разложится на леса $T_1, T_2, \ldots T_f$. Описанный алгоритм обозначим через D.

Теорема 2. *Алгоритм D разлагает граф на минимальное число остовных лесов.*

Доказательство. Применим алгоритм D к графу G. Пусть $G_1^*=(X_1^*, U_1^*), \ldots, G_q^*=(X_q^*, U_q^*)$ — последние предельные графы, которые больше не рождают новых предельных графов. Обозначим

$$r=\max_i\left\{\frac{|U_i^*|}{|X_i^*|-1}\right\}=\left\{\frac{|U_{i_0}^*|}{|X_{i_0}^*|-1}\right\}, \text{ где } i_0\in\overline{1, q}.$$

По построению разложения $T_1, T_2, \ldots, T_f$, для формирования каждого члена $T_1, T_2, \ldots, T_{f-1}$, из предельного графа $G_{i_0}^*$ участвует по одному каркасу, а для формирования члена T_f, из подграфа $G_{i_0}^*$ участвует или каркас, или лес. Так как через f шагов разложение кончается, то $|U_{i_0}^*|=(f-1)\cdot(|X_{i_0}^*|-1)+\alpha$, где $0<\alpha\leqslant|X_{i_0}^*|-1$. Тогда

$$f=\frac{|U_{i_0}^*|}{|X_{i_0}^*|-1}+1-\frac{\alpha}{|X_{i_0}^*|-1}.$$

Легко проверить, что $f=r$. Так как $T_1, \ldots, T_f$ — некоторое разложение, то $r(G)\leqslant f$. С другой стороны, для подграфа $G_{i_0}^*\subset G$ имеет место $r(G_{i_0}^*)=r=f$ и, значит, $r(G)\geqslant r=f$. Следовательно,

$$r(G)=f=r=\max_i\left\{\frac{|U_i^*|}{|X_i^*|-1}\right\}.$$

Итак, алгоритм D разлагает граф на леса $T_1, \ldots, T_f$, которое является минимальным разложением графа на остовные леса. Теорема доказана.

Оценим порядок алгоритма D.

В основе алгоритма D лежат: алгоритм D_1 для выделения каркаса из связного графа и алгоритм D_2 для построения блоков в графе. Известны простые алгоритмы D_1 и D_2, имеющие порядки $|D_1| = c_1 \cdot p^2$, $|D_2| = c_2 \cdot p^4$ соответственно, где $|X| = p$. Нетрудно проверить, что алгоритм D в наихудшем варианте потребует не больше порядка $|D_1| + 2 \cdot c_1 \cdot p^2 \cdot |D_2| \sim p^6$ операций.

Теорема 3. *Каждый максимальный планарный граф с $p \geq 4$ вершинами можно разложить на три остовных леса так, чтобы два из них были каркасами.*

Доказательство. Пусть $G = (X, U)$ — максимальный плоский граф с $p \geq 4$ вершинами, т. е. G — треангуляция. Из графа G выделим некоторый каркас T_1. Ребра оставшегося графа $G^{(1)}$ назовем хордами. Докажем, что $G^{(1)}$ имеет только одну непустую компоненту связности. На внешнем цикле $C_1 = (u_1, u_2, u_3)$ треангуляции G существует хорда, иначе в T_1 возник бы цикл. Для каждой такой хорды рассмотрим непосредственные грани этих хорд, лежащие внутри цикла C_1. В цикле C_1 все хорды заменим теми парами ребер, которые лежат на рассмотренных гранях. Очевидно, что всякая хорда полученного цикла смежна с некоторой хордой цикла C_1. Всю эту операцию произведем для полученного цикла, после которого получится новый цикл, который может быть и не простым и т. д. На каждом шагу любая хорда в новом цикле смежна с некоторой хордой предыдущего цикла. Значит, часть графа G, состоящая из хорд, — компонента связности для $G^{(1)}$. Следовательно, если из графа G выделим каркас T_1, то в остальном графе одна из компонент связности состоит только из хорд, а остальные компоненты будут изолированными вершинами. Опишем алгоритм, который изменением каркаса T_1, соединяет изолированные вершины с компонентой связности, состоящей из хорд. Пусть x — некоторая изолированная вершина. Так как она стала изолированной после выделения каркаса T_1, то все инцидентные ребра (x, y_i), $i = 1, 2, \ldots, g$ вершины x принадлежат каркасу T_1. Все ребра (y_1, y_2), (y_2, y_3), $\ldots$, (y_g, y_1) являются хордами, так как иначе в T_1 возник бы цикл. Заменим ребра (y_1, y_2) и (x, y_1) в частях $G^{(1)}$ и T_1. После этого преобразования получим новый каркас T_1. Через некоторое количество шагов получим каркас T_1 графа G, такой, что после его удаления граф $G^{(1)}$ станет связным.

Выделим из графа $G^{(1)}$ каркас T_2. Оставшуюся часть графа $G^{(1)}$ обозначим через $G^{(2)}$. В случае, если $G^{(2)}$ — ациклический, доказательство теоремы завершается. Пусть $G^{(2)}$ содержит цикл. Очевидно, при любом выборе каркасов T_1 и T_2, граф $G^{(2)}$ будет несвязным. Это значит, что применением над $G^{(2)}$ алгоритма A, получим ациклический граф (что приводит к завершению доказательства) или возникнет предельный граф $G_1 = (X_1, U_1)$. Из конструкции предельного графа следует, что граф G_1 имеет три каркаса попарно без общих ребер, т. е. $|U_1| \geq 3 \cdot (|X_1| - 1)$. С другой стороны, так как G_1 — планарный, то $|U_1| < 3|X_1| - 1$, что является противоречием. Теорема 3 доказана.

Опишем алгоритм, для выявления в графе $2f$-вершинного полного подграфа K_{2f}, где $f = r(G)$.

Применим алгоритм D к графу $G = (X, U)$, который разложит G на леса $T_1, T_2, \ldots T_f$. Известно [1], что $2f$-вершинный подграф K_{2f} можно разложить на f каркасов. Возьмем произвольное ребро $u_1 \in T_f$ и рассмотрим следующие части графа G

$$\bigcup_{i=1}^{f-1} T_i(u_1) = R_1, \quad T_f(R_t) = S_t, \quad \bigcup_{i=1}^{f-1} T_i(S_t) = R_{t+1}, \quad t = 1, 2, \ldots,$$

$$\bigcup_t (R_t \cup S_t) = Q(u_1).$$

Теорема 4. *Для того, чтобы ребро $u \in T_f$ было ребром для некоторого полного подграфа K_{2f}, необходимо и достаточно, чтобы $Q(u) = K_{2f}$.*

Необходимость. Пусть $u \in T_f$ и $u \in K_{2f}$. Так как $U(K_{2f}) = 2f(2f-1)/2$, то части каркасов $T_1, T_2, \ldots, T_f$, лежащие на K_{2f}, являются каркасами для K_{2f}. Следовательно, часть $Q(u)$ не выходит из K_{2f} и состоит из f каркасов. Это возможно только тогда, когда $Q(u) = K_{2f}$.

Достаточность. Если $Q(u) = K_{2f}$, то $u \in K_{2f}$. Теорема 4 доказана.

В случае, если никакое ребро каркаса T_f не является ребром полного подграфа K_{2f}, то очевидно, G не содержит полного подграфа K_{2f}.

Вычислительный центр Академии наук
Армянской ССР и Ереванского государственного
университета

Ժ. Գ. ՆԻԿՈՂՈՍՅԱՆ

Գրաֆների նվազագույն քանակի անտառների տրոհման մասին

Աշխատանքում բերվում է $c \cdot p^n$ կարգի ալգորիթմ, որը յուրաքանչյուր $G = (X, U)$ սովորական գրաֆ տրոհում է նվազագույն քանակի անտառների, որտեղ $|X| = p$։ Մասնավորապես կառուցվում է նույն կարգի ալգորիթմ, որը յուրաքանչյուր կապակցված գրաֆից ընտրում է առավելագույն քանակի ընդհանուր կողեր չունեցող կարկասներ։ Ապացուցվում է, որ $p \geq 4$ գագաթանոց յուրաքանչյուր մաքսիմալ հարթ գրաֆ կարելի է տրոհել երեք անտառների այնպես, որ նրանցից երկուսը լինեն կարկասներ։ Բերվում է $c \cdot p^n$ կարգի ալգորիթմ, որը յուրաքանչյուր գրաֆում ի հայտ է բերում $2f$-գագաթանոց լրիվ ենթագրաֆ, որտեղ $f = r(G)$։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Ф. Харари.* Теория графов. Изд. «Мир», М., 1973. [2] *А. А. Зыков.* Теория конечных графов. I. Изд. «Наука», Новосибирск, 1969.