

УДК 539.3

МЕХАНИКА

С. С. Шагинян

Некоторые контактные задачи для бесконечной пластины с круговым отверстием, усиленной упругими накладками

(Представлено академиком АН Армянской ССР Н. Х. Арутюняном 20/V 1974)

В настоящей работе в рамках известных физических предположений ^(1,2) рассматриваются тесно связанные между собой контактные задачи трех типов для пластины с круговым отверстием, когда последняя усилена системой упругих накладок различной формы и различными способами.

Решение указанных задач, являющихся продолжениями ранее исследованных нами задач ^(3,4), сводится к решению или одного сингулярного интегро-дифференциального уравнения или же системы таких уравнений при некоторых граничных условиях.

Известным способом ⁽⁵⁻⁷⁾ решение этих уравнений сведено к решению вполне или квазивполне регулярных бесконечных систем линейных алгебраических уравнений.

Рассмотренные здесь задачи непосредственно связаны с вопросами передачи нагрузок от стрингеров к основаниям и представляют определенный интерес для инженерной практики.

1. Пусть упругий лист в виде тонкой бесконечной пластины, с круговым отверстием радиуса R , усиленной системой упругих накладок, как показано на рис. 1, деформируется силами P , действующими на

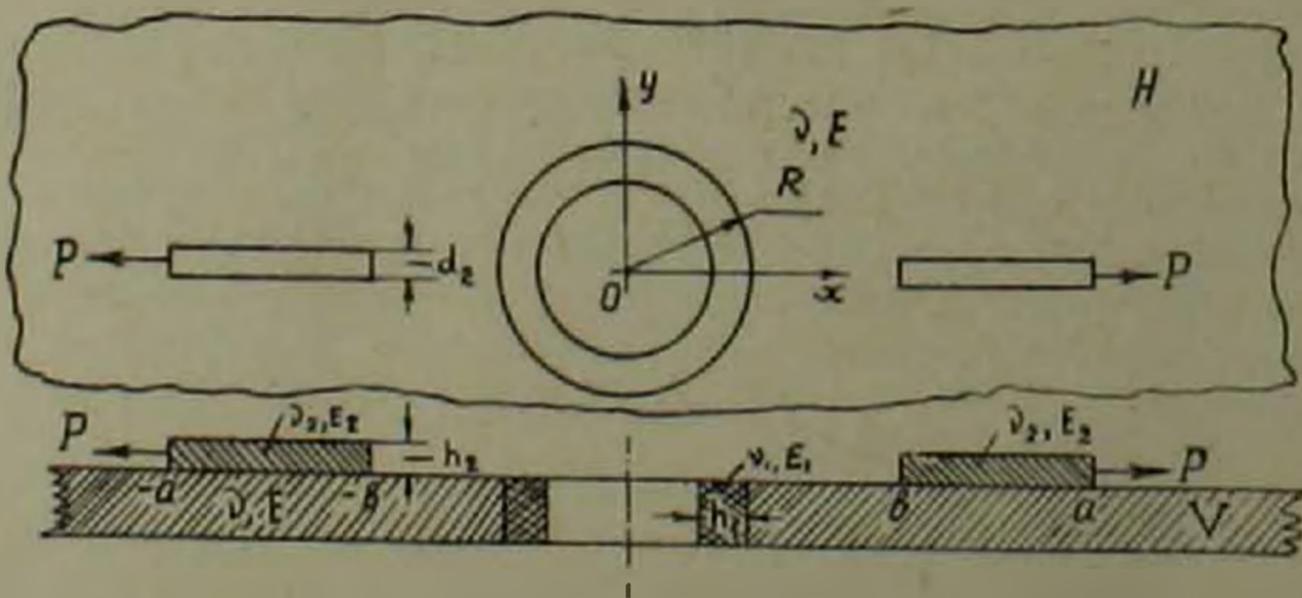


Рис. 1

концах упругих накладок, приклеенных на симметричных отрезках $[-a, -b], [b, a]$ вещественной оси. Во второй задаче предполагается, что та же пластина, усиленная вдоль симметрично расположенными отрезками $[-a, -b], [b, a]$ вещественной оси упругими накладками постоянного прямоугольного поперечного сечения малой площади, деформируется силами P , как показано на рис. 2. Рассматривается также слу-

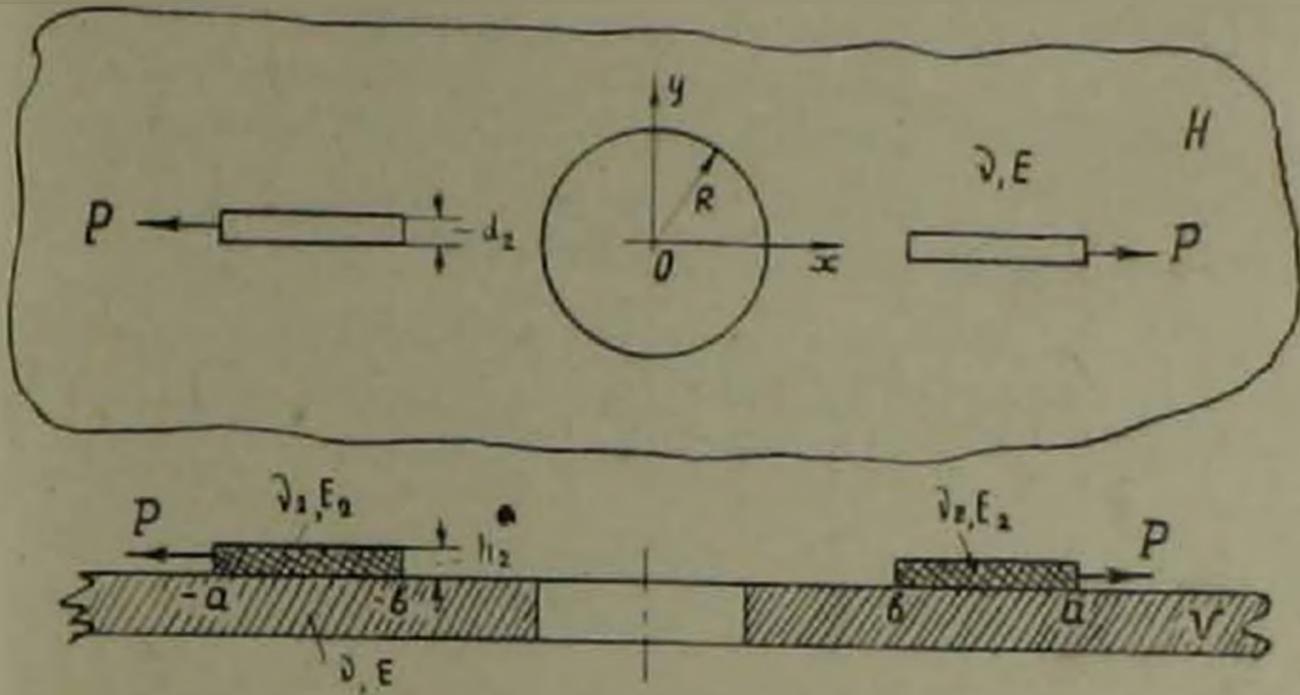


Рис. 2

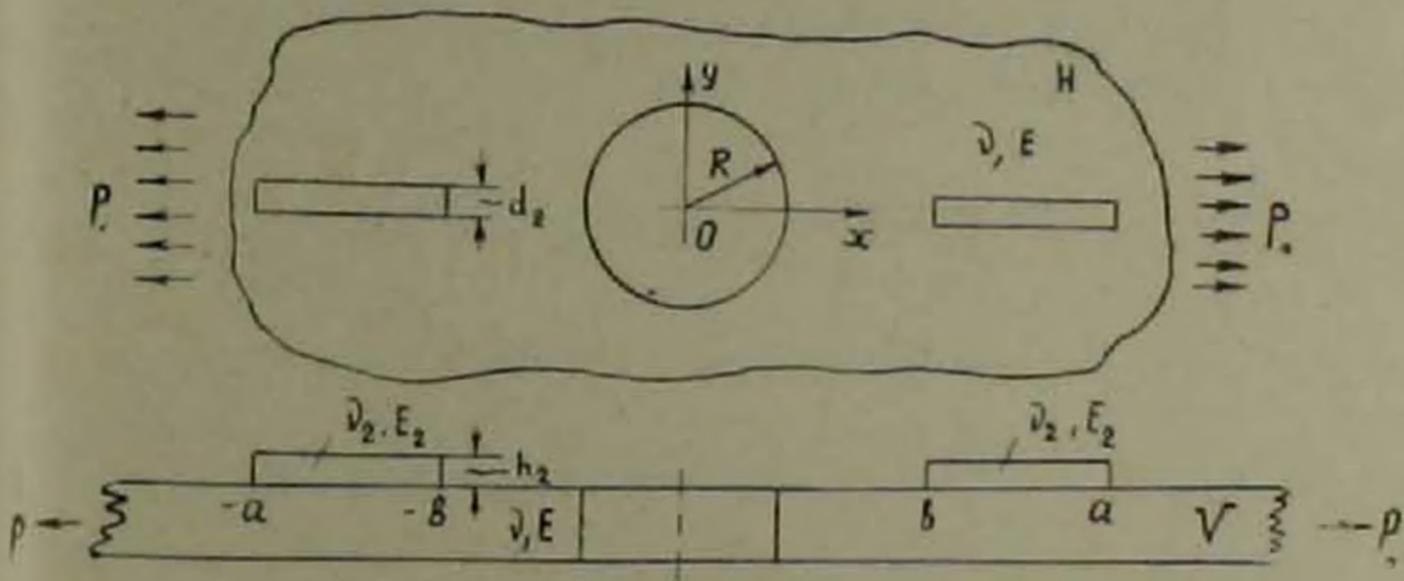


Рис. 3

ий, когда пластина, усиленная упругими накладками, как во второй задаче, подвержена на бесконечности одностороннему растяжению усилиями P_0 в направлении оси стрингеров (рис. 3). Цель нашей работы заключается в определении закона распределения контактных напряжений вдоль отрезков креплений упругих накладок с основанием.

В дальнейшем эти задачи кратко будем именовать первой, второй и третьей контактными задачами соответственно.

Здесь же отметим, что контактная задача для пластины с круговым отверстием, аналогичная со второй и третьей контактными задачами настоящей работы, другим методом и в частном случае, когда приклеенные к пластине стрингеры своими концами выходят на обвод отверстия, рассмотрена в работе (6). Рассмотренная нами задача более обща и здесь приводится ее полное исследование, включающее

определение в явной форме важной механической характеристики — закона распределения тангенциальных контактных напряжений.

Условимся все физические и геометрические величины, относящиеся к кольцевой накладке, обозначить индексом 1, для прямолинейных накладок — индексом 2 и, наконец, для основания, т. е. для пластины с круговым отверстием — без индекса.

Сначала рассмотрим первую контактную задачу. Пользуясь известным комплексным представлением общего решения плоской задачи теории упругости ⁽⁹⁾, легко определить соответствующие функции влияния. Далее, следуя работам ⁽³⁻⁷⁾, находим, что решение первой контактной задачи можно свести к решению следующей системы сингулярных интегро-дифференциальных уравнений:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{s-t}{2} + K_{11}(t,s) \right] \psi_1'(s) ds + \int_b^a K_{12}(t,s) \psi_2'(s) ds = \gamma_1 \psi_1(t) + \Theta \sigma_{\theta}^{(1)}(-\pi < t < \pi)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} K_{21}(t,s) \psi_1'(s) ds + \int_b^a \left[\frac{1}{s-t} + K_{22}(t,s) \right] \psi_2'(s) ds = \gamma_2 \psi_2(t) \quad (1.1)$$

при граничных условиях

$$\psi_1(-\pi) = 0, \quad \psi_1(\pi) = 0, \quad \psi_2(b) = 0, \quad \psi_2(a) = 1. \quad (1.2)$$

Интегралы в (1.1) с ядрами Гильберта и Коши следует понимать в смысле главного значения по Коши.

Здесь

$$K_{11}(t,s) = \frac{3-\nu}{4} \sin(t-s) + \sin(t-s) \ln 2 \left| \sin \frac{t-s}{2} \right| - \frac{1-\nu}{2} \cdot \frac{\pi - |t-s|}{2} \times$$

$$\times \cos(t-s) \operatorname{sign}(t-s), \quad (-\pi \leq t, s \leq \pi)$$

$$K_{12}(t,s) = \frac{\nu^2 + 2\nu - 7}{16} \cos t \ln \frac{s^2 + 2s \cos t + 1}{s^2 - 2s \cos t + 1} + \frac{\nu^2 + 2\nu - 7}{16} \times$$

$$\times \frac{(1+s^4) \sin^2 t}{(s^2 + 2s \cos t + 1) \cos t} - \frac{\nu^2 - 2\nu + 5}{8} \sin t \operatorname{arctg} \frac{2s \sin t}{1-s^2} - \frac{\nu^2 + 2\nu - 7}{16} \times$$

$$\times \frac{(1+s^4) \sin^2 t}{(s^2 - 2s \cos t + 1) \cos t} + \frac{\nu^2 - 2\nu + 5}{4} \cdot \frac{(s-s^3) \cos^2 t}{(1-s^2)^2 + 4s^2 \sin^2 t} +$$

$$+ \frac{|2 - (1-\nu)s^2|(1+\nu)}{2} \cdot \frac{(s+s^3) \cos 2t - 2s^3}{(s^4 - 2s^2 \cos 2t + 1)^2}$$

$$K_{21}(t,s) = -\frac{\nu^2 - 2\nu + 5}{(3-\nu)(1+\nu)} \cdot \frac{\sin s}{t} + \frac{\sin s}{t^3} + \frac{8}{(3-\nu)(1+\nu)} \cdot \frac{(t - \cos s) \sin s}{t^2 - 2t \cos s + 1}$$

$$+ \frac{2(1-\nu)}{(3-\nu)(1+\nu)} \cdot \frac{\sin 2s}{t^2 - 2t \cos s + 1} - \frac{4}{3-\nu} \cdot \frac{t \sin s}{t^2 - 2t \cos s + 1} + \frac{4}{3-\nu} \times$$

$$\times \frac{(t^2 - 1)(t - \cos s) \sin s}{(t^2 - 2t \cos s + 1)^2}, \quad (-\pi \leq s \leq \pi, \quad b < t < a)$$

$$K_{\Sigma}(t, s) = \frac{1}{s+t} - \frac{2(\nu^2 - 2\nu + 5)}{(3-\nu)(1+\nu)} \cdot \frac{s}{t^2s^2-1} + \frac{(5+\nu)s^2+1-3\nu}{(3-\nu)s(t^2s^2-1)} +$$

$$\frac{2(1-3\nu)(1-s^2)}{(3-\nu)s(t^2s^2-1)^2} + \frac{3s(1-t^2)}{t^2(t^2s^2-1)} + \frac{2s(1-t^2)}{t^2(t^2s^2-1)^2} - \frac{3(1+\nu)}{3-\nu} \cdot \frac{(1-t^2)(1-s^2)}{st^2(t^2s^2-1)} -$$

$$\frac{12(1+\nu)}{3-\nu} \cdot \frac{(1-t^2)(1-s^2)}{st^2(t^2s^2-1)^2} - \frac{8(1+\nu)}{3-\nu} \cdot \frac{(1-t^2)(1-s^2)}{st^2(t^2s^2-1)^2} - \frac{1+\nu}{3-\nu} \cdot \frac{1}{st^2}.$$

$(b \leq t, s \leq a)$

и постоянные параметры

$$\gamma_1 = \frac{\pi(1+\nu_1)(1-2\nu_1)E}{2h_1(1-\nu_1)E_1}, \quad \gamma_2 = \frac{4\pi E}{h_2d_2(3-\nu)(1+\nu)E_2}, \quad H = \frac{\nu_1 h_1 d_2}{P},$$

где E и ν — модуль Юнга и коэффициент Пуассона соответственно.

Контактные напряжения под кольцевой накладкой и прямолинейными накладками даются соответственно формулами

$$z(s) = \frac{P}{Rd_2} \psi_1'(s), \quad -\pi < s < \pi$$

$$q(s) = \frac{P}{d_2^2} \psi_2'(s), \quad b < s < a$$

Перейдя ко второму и третьему контактным задачам, отметим лишь, не останавливаясь на подробностях, что их решение сводится к решению следующего сингулярного интегро-дифференциального уравнения

$$\int_b^a \left[\frac{1}{s-t} + K(t,s) \right] \varphi'(s) ds = \varphi(t) - Hf(t), \quad (b < t < a) \quad (1.3)$$

при граничных условиях $\varphi(b)=1$, $\varphi(a)=1$ для второй контактной задачи и при граничных условиях $\varphi(b)=0$, $\varphi(a)=0$ для третьей контактной задачи. Интегралы, фигурирующие в уравнении (1.3) с особенностями типа Коши, следует понимать в смысле главного значения по Коши. Заметим, что при решении уравнения (1.3) для второй контактной задачи в него необходимо положить $f(t)=0$, $(b \leq t \leq a)$.

Функции $K(t,s)$ и $f(t)$ имеют вид

$$K(t,s) = \frac{1}{s+t} - \frac{2\nu^2+4\nu+18}{(3-\nu)(1+\nu)} \cdot \frac{s}{t^2s^2-1} - \frac{2(3\nu+11)}{3-\nu} \cdot \frac{s}{(t^2s^2-1)^2} + \frac{4}{3-\nu} \times$$

$$\frac{1}{s(t^2s^2-1)} + \frac{2(3\nu+7)}{3-\nu} \cdot \frac{1}{s(t^2s^2-1)^2} + \frac{12}{3-\nu} \cdot \frac{st^{-2}}{t^2s^2-1} + \frac{2(5\nu+9)}{3-\nu} \cdot \frac{st^{-2}}{(t^2s^2-1)^2} -$$

$$\frac{10(1+\nu)}{3-\nu} \cdot \frac{s^{-1}t^{-2}}{(t^2s^2-1)^2} - \frac{8(1+\nu)}{3-\nu} \cdot \frac{(1-t^2)(1-s^2)}{st^2(t^2s^2-1)^2},$$

$$f(t) = \frac{4}{1+\nu} - \frac{2(5+\nu)}{(1+\nu)t^2} + \frac{6}{t^4}, \quad (b \leq t \leq a)$$

а постоянные параметры — вид

$$\lambda = \frac{4\pi E}{h_2 d_2 (3-\nu)(1+\nu) E_2}, \quad \theta = \frac{\pi}{(3-\nu)d_2}.$$

Контактные напряжения для этих задач даются формулами

$$q(s) = \frac{P}{d_2} \varphi'(s), \quad (b < s < a)$$

для второй контактной задачи и

$$q(s) = P_0 \varphi'(s), \quad (b < s < a)$$

для третьей контактной задач.

Таким образом, решение поставленных выше задач сводится к решению или одного сингулярного интегро-дифференциального уравнения или же системы таких уравнений с определенными граничными условиями.

2. В случае первой контактной задачи можно положить

$$\psi_1'(s) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \sin 2ns, \quad (-\pi < s < \pi) \quad (2.1)$$

$$\psi_2'(s) = \left[1 - \left(\frac{2s-a-b}{a-b} \right)^2 \right]^{-1/2} \sum_{n=0}^{\infty} y_n T_n \left(\frac{2s-a-b}{a-b} \right), \quad (b < s < a) \quad (2.2)$$

Здесь $T_n(\tau) = \cos(n \arccos \tau)$, $(n=0, 1, 2, \dots)$ — многочлены Чебышева первого рода. В (2.1) и (2.2) $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ неизвестные коэффициенты, подлежащие определению.

Далее, поступая известным способом (3–7), приходим к бесконечной системе

$$\left(1 + \frac{2}{4m^2-1} + \frac{\lambda_1}{2\pi m} \right) x_m + \sum_{n=1}^{\infty} y_n n^{-1} C_{m,n} = a_m \quad (m=1, 2, \dots) \quad (2.3)$$

$$y_m + \sum_{n=1}^{\infty} x_n n^{-1} D_{m,n} + \sum_{n=1}^{\infty} y_n n^{-1} (A_{m,n} + B_{m,n}) = b_m.$$

Ядра этой бесконечной системы выражаются формулами простой структуры и здесь не приводятся.

Отметим, что после того, как определены коэффициенты $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ значение $\sigma_n^{(1)}(-\pi)$ нормального напряжения определяется из первого уравнения (1.1).

Для второй и третьей контактных задач искомое контактное напряжение представим в виде разложения по многочленам Чебышева первого рода следующим образом

$$\varphi'(s) = \left[1 - \left(\frac{2s-a-b}{a-b} \right)^2 \right]^{-1/2} \sum_{m=0}^{\infty} z_m T_m \left(\frac{2s-a-b}{a-b} \right), \quad (b < s < a)$$

где $z_m (m=0, 1, 2, \dots)$ — неизвестные коэффициенты, подлежащие определению. Совершенно аналогичным способом, как выше, для определения неизвестных коэффициентов получим бесконечную систему линейных уравнений

$$z_n + \sum_{m=1}^{\infty} z_m m^{-1} A_{m,n} = b_n, \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (2.4)$$

Ядра и свободные члены (2.4) выражаются известными формулами, которые здесь не приводятся. Коэффициент z_0 определяется из граничных условий, при этом $z_0 = 1/\pi$ для второй контактной задачи и $z_0 = 0$ для третьей контактной задачи.

3. Перейдем к исследованию системы (2.3). Для этого оценим суммы

$$S_m^{(1)} = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} |C_{m,n}|, \quad m = 1, 2, \dots \quad (3.1)$$

$$S_m^{(2)} = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} |D_{m,n}| + \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} |A_{m,n} + B_{m,n}|, \quad m = 1, 2, \dots \quad (3.2)$$

Далее, следуя методике, предложенной в работе (7), при помощи неравенства Коши—Буняковского для (3.1) будем иметь

$$S_m^{(1)} \leq \frac{\pi}{\sqrt{6}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} C_{m,n}^2 \right)^{1/2}, \quad m = 1, 2, \dots \quad (3.3)$$

Рассмотрим теперь функцию

$$\omega_m(s) = \frac{(a-b)^2}{8} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\partial K_{12}(t,s)}{\partial s} \cos 2mt dt, \quad m = 1, 2, \dots$$

Коэффициенты $|C_{m,n}|_{m,n=1}^{\infty}$ являются коэффициентами Фурье этой функции по системе многочленов $\left\{ U_{n-1} \left(\frac{2s-a-b}{a-b} \right) \right\}_{n=1}^{\infty}$, ортогональной с весом $\rho(s) = \left| 1 - \left(\frac{2s-a-b}{a-b} \right)^2 \right|^{1/2} \mathfrak{L}_1^2(b,a)$.

Следовательно, на основании известного равенства Парсеваля

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_{m,n}^2 = \frac{4}{\pi(a-b)} \int_b^a \rho(s) \omega_m^2(s) ds \leq \frac{(a-b)^2}{16} \left\| \frac{\partial K_{12}}{\partial s} \right\|^2, \quad (3.4)$$

но тогда из (3.3) и (3.4) будем иметь

$$S_m^{(1)} \leq \frac{\pi(a-b)}{4} \sqrt{\frac{a-b}{6}} \left\| \frac{\partial K_{12}}{\partial s} \right\|, \quad m = 1, 2, \dots \quad (3.5)$$

Аналогичным образом поступая для $S_m^{(2)}$, будем иметь

$$S_m^{(2)} < \frac{2}{\sqrt{6\pi(a-b)}} \left\| \frac{\partial K_{21}}{\partial s} \right\| + \frac{\sqrt{2} \lambda_2(a-b)}{8} + \frac{a-b}{\sqrt{6\pi}} \left\| \frac{\partial K_{22}}{\partial s} \right\|. \quad (3.6)$$

Для полной регулярности системы бесконечных систем линейных уравнений (2.3) достаточно, чтобы одновременно выполнялись условия

$$\frac{2}{3} + \frac{\lambda_1}{2\pi} + S_m^{(1)} < 1$$

$$S_m^{(2)} < 1$$

С учетом (3.5) и (3.6) эти условия примут вид

$$\lambda_1 < 2\pi \left| \frac{1}{3} - \frac{\pi(a-b)}{4} \sqrt{\frac{a-b}{6}} \left\| \frac{\partial K_{11}}{\partial s} \right\| \right|,$$

$$\lambda_2 < \frac{4\sqrt{3}}{3(a-b)} \left| \sqrt{6} - \frac{2}{\sqrt{\pi(a-b)}} \left\| \frac{\partial K_{21}}{\partial s} \right\| - \frac{a-b}{\sqrt{\pi}} \left\| \frac{\partial K_{22}}{\partial s} \right\| \right|.$$

Так как ядра рассматриваемых систем представляют собой коэффициенты Фурье определенных квадратично интегрируемых функций, то при помощи неравенств Бесселя и известных теорем из теории двойных рядов ⁽¹⁰⁾ легко показать ⁽¹⁶⁾, что при остальных значениях параметров λ_1 и λ_2 система (2.3) квазивполне регулярна.

Кроме того, поскольку свободные члены $a_m (m=1, 2, \dots)$ и $b_m (m=1, 2, \dots)$ убывают при $m \rightarrow \infty$ со скоростью не менее, чем m^{-1} , следовательно, по крайней мере тот же порядок убывания имеют неизвестные коэффициенты ⁽¹¹⁾.

Изложенный выше способ исследования можно применить и к системе (2.4). При этом оказывается, что при

$$\lambda < 4 \left| 1 - \frac{a-b}{2\sqrt{3\pi}} \left\| \frac{\partial K}{\partial s} \right\| \right|$$

система (2.4) вполне регулярна, а для любого значения этого параметра она квазивполне регулярна.

Институт механики
Академии наук Армянской ССР

Ս. Ս. ՇԱՀԻՆՅԱՆ

Առաձգական վերադիրեներով ուժեղացված շրջանային անցքով հարբուրյան համար մի ֆանի կոնտակտային խնդիրներ

Աշխատանքում դիտարկված են երեք տիպի կոնտակտային խնդիրներ շրջանաձև անցքով թուլացված սույի համար, երբ վերջինս ուժեղացված է բարակ առաձգական վերադիրեներով: ⁽¹²⁾ աշխատանքներում արված ֆիզիկական ենթադրությունների շրջանակներում նշված խնդիրների լուծումը բերվում է կամ երկու սինգուլյար ինտեգրո-դիֆերենցիալ հավասարումների սխտեմի լուծման կամ այդպիսի մեկ հավասարման լուծման, որոշակի եզրային պայմանների դեպքում: Առաջին դեպքում կորիզների եղակիությունները պայմանավորված են կոշու և Հիլբերտի կորիզներով, երկրորդ դեպքում՝ կոշու կորիզով: Ստացված հավասարումների սխտեմը կամ հավասարումը լուծված են օրինոգոնալ բազմանդամների մեթոդով: Աստացուցված է ստացվող անվերջ հավասարումների սխտեմների լիովին և քվադրիլիովին ռեզուլյարությունը:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ E. Melan, Ein Beitrage zur theorie geschweifter Verbindungen. Ing. Arch. Bd. 3, Nr. 2, 1932. ² Н. Х. Арутюнян, ПММ, т. 32, вып. 4, (1968). ³ С. С. Шагинян, МТТ, №5, 1972. ⁴ С. С. Шагинян, Известия АН Арм. ССР, Механика, т. 27, №1, (1974). ⁵ N. K. Arutunyan, S. M. Mkhitarian, Trends in elasticity and thermoelasticity: Witold Nowacki Anniversary Volume. Wolters.— Noordhoff Publishing, 1971. ⁶ Н. Х. Арутюнян, С. М. Мхитарян, ПММ, т. 33, вып. 5, (1972). ⁷ К. Л. Агаян, МТТ, №5, (1972). ⁸ Г. Т. Жоржолуани, А. И. Каландия, ПММ, т. 38, вып. 1, (1974). ⁹ Н. И. Мусхелишвили, История основных задач математической теории упругости, М., Физматгиз, 1966. ¹⁰ Э. Уиттекер, Г. Ватсон, Курс современного анализа, т. 3, Физматгиз, М., 1963. ¹¹ Л. Канторович, В. Крылов, Приближенные методы высшего анализа, М.—Л., Гостехиздат, 1950.