ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LIX 1974 2

УДК 539.3

МЕХАНИКА

Г. Е. Багдасарян

Устойчивость проводящей пластинки в потоке проводящего газа при наличии магнитного поля

(Представлено академиком АН Армянской ССР С. А. Амбарцумяном 22/V 1974)

В последнее время большое внимание уделяется задачам устойчивости пластин и оболочек в потоке проводящего газа при наличии магнитного поля ([1–6]). В этих работах влияние магнитного поля учитывается. с одной стороны, силой, с которой магнитное поле действует на токи проводимости в газе, а с другой стороны, силой, обусловленной напряжениями Максвелла на поверхности тела. В перечисленных работах электромагнитные эффекты в теле не рассматриваются, т. е. не учитываются силы, обусловленные токами проводимости в пластинке или оболочке.

В настоящей работе на основе уравнений магнитоупругости тонких тел, полученных в ([7,8]) рассматривается задача устойчивости плоской формы проводящей пластинки в магнитном поле, обтекаемой сверхзвуковым потоком идеально проводящего невязкого газа. Вектор напряженности заданного магнитного поля перпендикулярен как плоскости движения, так и вектору скорости обтекаемого потока. Исследуется влияние проводимости материала пластинки на критическую скорость флаттера. Получена приближенная формула для расчета избыточного давления газа на тело. Эту формулу можно применять для приближенного расчета избыточного давления газа на пластинку с конечными размерами.

1. Пусть упругая бесконечная изотропная пластинка постоянной толщины $2h$ отнесена к декартовой системе координат x, y, z, так, что срединная плоскость недеформированной пластинки совпадает с координатной плоскостью xy.

Пластинка, изготовленная из материала с конечной постоянной электропроводностью σ, помещена во внешнем магнитном поле с заданным вектором напряженности $\vec{H}_0(0, H, 0)$, параллельным оси oy.

Пусть, далее, пластинка, с одной стороны ($z > h$), обтекается сверхзвуковым потоком идеально проводящего газа, с невозмущенной скоростью U, направленной вдоль оси ox.

Принимаются следующие предположения:

а) гипотеза магнитоупругости тонких тел, определяющая законы изменения упругих перемещений и компонент электромагнитного поля по толщине пластинки ([7,8]);

б) в области $z<-h$ имеют место уравнения Максвелла для вакуума;

в) магнитные и диэлектрические проницаемости газа и материала пластинки считаются равными единице;

г) реализуется цилиндрическая форма потери устойчивости (все величины не зависят от координаты y);

д) влияния напряжений Максвелла в вакууме пренебрегаются ([9]).

Предполагается также, что упругие перемещения и электромагнитные возмущения настолько малы, что можно пользоваться линейными уравнениями.

В силу принятых предположений для рассматриваемой задачи получим следующие исходные уравнения и соотношения.

Уравнения магнитогазодинамики для области $z>h$

$$\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial t^2}+2U\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial x\partial t}+U^2\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial x^2}-\left(a_0^2+V_A^2\right)\left(\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial z^2}\right)=0$$

$$\frac{\partial\rho_1}{\partial t}+U\frac{\partial\rho_1}{\partial x}+\rho_0\left(\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial z^2}\right)=0,\qquad p=p_0+a_0^2\rho_1 \qquad (1.1)$$

$$\frac{\partial h_y}{\partial t}+U\frac{\partial h_y}{\partial x}+H\left(\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial z^2}\right)=0,\qquad \vec{v}=\mathrm{grad}\,\varphi_0$$

Здесь $a_0^2=\chi p_0/\rho_0$—скорость звука в невозмущенном газе, χ—показатель политропии, p_0—давление, ρ_0—плотность невозмущенного газа, $V_A^2=H^2/4\pi\rho_0$—скорость распространения электромагнитных волн Альфвена, p—давление, ρ_1—плотность, $\vec{v}(v_x,\ v_z)$—вектор скорости возмущенного газа, h_y—компонента индуцированного в газе магнитного поля в направлении оси oy.

Уравнения движения пластинки ([7])

$$D\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=\frac{2\sigma h}{c}H\left(\varphi-\frac{H}{c}\frac{\partial w}{\partial t}\right)+\frac{2\sigma h^3}{3c}H\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}-$$

$$-\frac{2\sigma h^3}{3c^2}H^2\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial t}+Z=0 \qquad \left(D=\frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}\right) \qquad (1.2)$$

Здесь w—прогиб, E—модуль упругости, ν—коэффициент Пуассона, ρ—плотность материала пластинки, φ—компонента индуцированного в пластинке электрического поля в направлении оси ox, c—скорость света.

Выражение для нормальной составляющей внешней поверхностной нагрузки Z имеет вид ([1])

$$Z=-2\rho h\varepsilon\frac{\partial w}{\partial t}+\left[-a_0^2\rho_1+T_{zz}\right]_{z=h},\quad T_{zz}=-\frac{H}{4\pi}h_y \tag{1.3}$$

В (1. 3) ε — коэффициент линейного затухания, Tzz — компонента тензора напряжений Максвелла в газе.

Для вектора напряженности электрического поля в газе имеем выражение ([1,2])

$$\vec{e}\,(e_x,\ e_z)=\frac{1}{c}\left[H\frac{\partial\varphi_0}{\partial z}\hat{i}-\left(UH+Uh_y+H\frac{\partial\varphi_0}{\partial x}\right)\hat{k}\right]. \tag{1.4}$$

К системам дифференциальных уравнений (1.1)—(1.2) необходимо присоединить условия непроницаемости стенки, условия непрерывности тангенциальных компонент электрического поля на поверхности раздела двух сред и условия затухания электромагнитных и аэродинамических возмущений на бесконечности. Эти условия в нашем случае с учетом (1.4) запишутся следующим образом:

$$v_z=\frac{\partial\varphi_0}{\partial z}=\frac{\partial w}{\partial t}+U\frac{\partial w}{\partial x}\qquad \text{при}\quad z=h$$

$$e_x=\varphi=\frac{H}{c}\frac{\partial\varphi_0}{\partial z}\qquad \text{при}\quad z=h \tag{1.5}$$

Из (1.5) для неизвестной функции $\varphi(x,\ t)$ легко найти

$$\varphi\,(x,\ t)=\frac{H}{c}\left(\frac{\partial w}{\partial t}+U\frac{\partial w}{\partial x}\right) \tag{1.6}$$

2. Решения уравнений (1.1), (1.2) будем искать в виде

$$w=w_0e^{i(\omega t-kx)},\qquad \varphi_0=f(z)e^{i(\omega t-kx)}$$

$$\rho_1=\rho_1(z)e^{i(\omega t-kx)},\qquad h_y=\psi(z)e^{i(\omega t-kx)} \tag{2.1}$$

Здесь все функции от z являются неизвестными и подлежат определению, $k=\pi/l$ — волновое число, l — длина полуволны в направлении потока, ω — частота колебаний.

Система уравнений (1.1) после подстановки решений в виде (2.1) и некоторых преобразований приводится к одному дифференциальному уравнению для определения функции $f(z)$

$$\frac{d^2f}{dz^2}+\mu^2f=0\ , \tag{2.2}$$

где $\quad \mu^2=k^2(M_l^2-1),\qquad M_l^2=\frac{1}{1+\lambda^2}\,\frac{(U-V)^2}{a_0^2}\ ,$

$$V=\frac{\omega}{k}\ ,\qquad \lambda^2=\frac{V_A^2}{a_0^2}.$$

Остальные неизвестные функции представляются посредством функции $f(z)$ следующим образом:

$$\rho_1(z)=ik\rho_0\frac{M_1^2}{U-V}f(z)$$

$$\psi(z)=ikH\frac{M_1^2}{U-V}f(z) \tag{2.3}$$

Решая уравнение (2.2) и удовлетворяя условиям затухания возмущений на бесконечности и первому уравнению (1.5) имеем:

$$\varphi_0\,(x,z,t)=-\frac{k(U-V)}{\mu}e^{i\mu(z-h)}w(x,\,t),$$

$$\rho_1\,(x,z,t)=-ik^2\,\rho_0\frac{M_1^2}{\mu}e^{i\mu(z-h)}w(x,\,t),$$

$$h_y(x,z,t)=-ik^2H\,\frac{M_1^2}{\mu}e^{i\mu(z-h)}w(x,\,t)\,. \tag{2.4}$$

Заметим, что решение (2.4) получено в работе ([1]) при исследовании аналогичной задачи для диэлектрической пластинки.

Из (1.3) в силу (2.4) для поперечной нагрузки получим выражение

$$Z=-2\rho h\varepsilon\frac{\partial w}{\partial t}+ik^2a_0^2\rho_0\frac{M_1^2}{\mu}(1+\lambda^2)w(x,\,t), \tag{2.5}$$

которое при $M_1^2 \gg 1$ (газ перемещается достаточно быстро относительно волн деформации, распространяющихся в пластинке) принимает следующий упрощенный вид:

$$Z=-2\rho h\varepsilon\frac{\partial w}{\partial t}-\frac{\chi p_0}{a_0}\sqrt{1+\lambda^2}\,\left(\frac{\partial w}{\partial t}+U\frac{\partial w}{\partial x}\right)\,. \tag{2.6}$$

Формула (2.6) является некоторым обобщением формулы для давления, полученной на основе „поршневой теории" классической газодинамики на случай магнитогидродинамического обтекания упругих пластинок.

Анализ устойчивости пластинки после подстановки (1.6) и (2.6) в (1.2) сводится к решению следующего дифференциального уравнения:

$$D\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+2\rho h\varepsilon\frac{\partial w}{\partial t}+\frac{\chi p_0}{a_0}\sqrt{1+\lambda^2}\left(\frac{\partial w}{\partial t}+U\frac{\partial w}{\partial x}\right)-$$
$$-\frac{2\sigma h}{c^2}H^2U\frac{\partial w}{\partial x}-\frac{2\sigma h^3}{3c^2}H^2U\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}=0 \tag{2.7}$$

с соответствующими краевыми условиями на торцах пластинки.

3. Представляя решение уравнения (2.7) в виде (2.1), приходим к характеристическому уравнению, которое записываем следующим образом:

$$\omega^2-i\omega(\varepsilon+\gamma_0\sqrt{1+\lambda^2})+ikU\,[\gamma_0\sqrt{1+\lambda^2}-\sigma_0\lambda^2(1-k_0^2)]-\Omega_0^2=0.$$

$$\gamma_0=\frac{\chi p_0}{2\rho h a_0},\quad \sigma_0=4\pi\sigma\frac{a_0^2}{c^2},\quad \Omega_0^2=\frac{Dk^4}{2\rho h},\quad k_0^2=\frac{h^2k^2}{3}. \tag{3.1}$$

Здесь Ω_0—частота собственных поперечных колебаний пластинки в вакууме, σ_0—параметр, характеризующий проводимость материала пластинки, λ — параметр, характеризующий напряженность заданного внешнего магнитного поля.

Поступая как в ([10]), из уравнения (3.1) для критической скорости флаттера получаем формулу

$$U_{kp}=V_0\frac{\varepsilon+\gamma_0\sqrt{1+\lambda^2}}{\left|\gamma_0\sqrt{1+\lambda^2}-\sigma_0\lambda^2(1-k_0^2)\right|}, \tag{3.2}$$

где $V_0=\Omega_0/k$ — фазовая скорость распространения изгибных волн при собственных колебаниях пластинки в вакууме.

В случае отсутствия магнитного поля ($\lambda=0$) из (3.2) получается формула

$$U_{kp}^0=V_0\left(1+\frac{\varepsilon}{\gamma_0}\right),$$

которая совпадает с известной формулой, полученной в работе (10)

Из (3.2) видно, что $\lambda\to\lambda_0$, где

$$\lambda_0^2=\frac{\gamma_0}{\sigma_0}\left[\frac{\gamma_0}{2\sigma_0}+\sqrt{1+\left(\frac{\gamma_0}{2\sigma_0}\right)^2}\right]$$

$U_{kp}\to\infty$, тем самым исключается возможность возникновения незатухающих колебаний (отсутствие флаттера).

Анализируя формулу (3.2) с точки зрения поведения U_{kp}, в зависимости от напряженности заданного магнитного поля замечаем, что здесь возможны следующие случаи:

а) Если $2\sigma_0>\varepsilon$ (материал пластинки обладает высокой проводимостью), то в промежутке $0\leq\lambda<\lambda_0$ критическая скорость флаттера с увеличением напряженности магнитного поля увеличивается и стремится к бесконечности при $\lambda\to\lambda_0$, а в промежутке $\lambda_0<\lambda<+\infty$ имеет место монотонное убывание с горизонтальной асимптотой $U_{kp}/U_{kp}^0=0$ (рис. 1).

б) Если $\gamma_0>2\sigma_0$ и $\varepsilon>2\gamma_0\sigma_0/(\gamma_0-2\sigma_0)$, то в промежутке $0\leq\lambda<\lambda_0$ с увеличением напряженности магнитного поля критическая скорость вначале уменьшается, достигая минимума для определенного значения λ, после чего начинает неограниченно возрастать, а в промежутке $\lambda_0<\lambda<+\infty$ характер изменения U_{kp} остается таким же, как и в предыдущем случае (рис. 2).

Таким образом, благодаря потоку (он здесь является добавочным источником электромагнитного поля), магнитное поле может

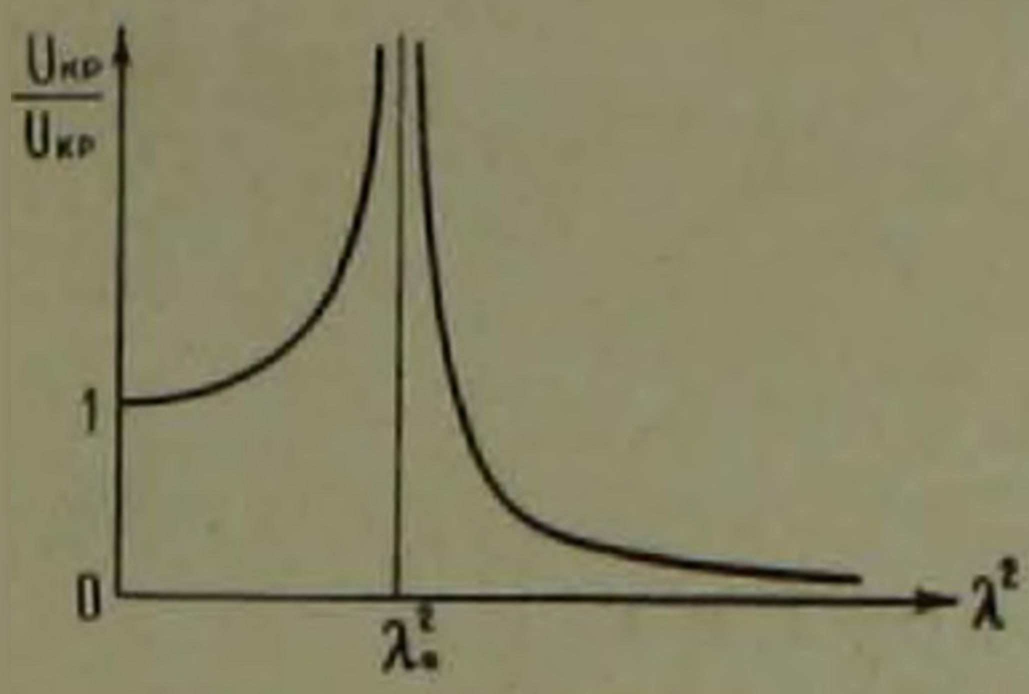

Рис. 1

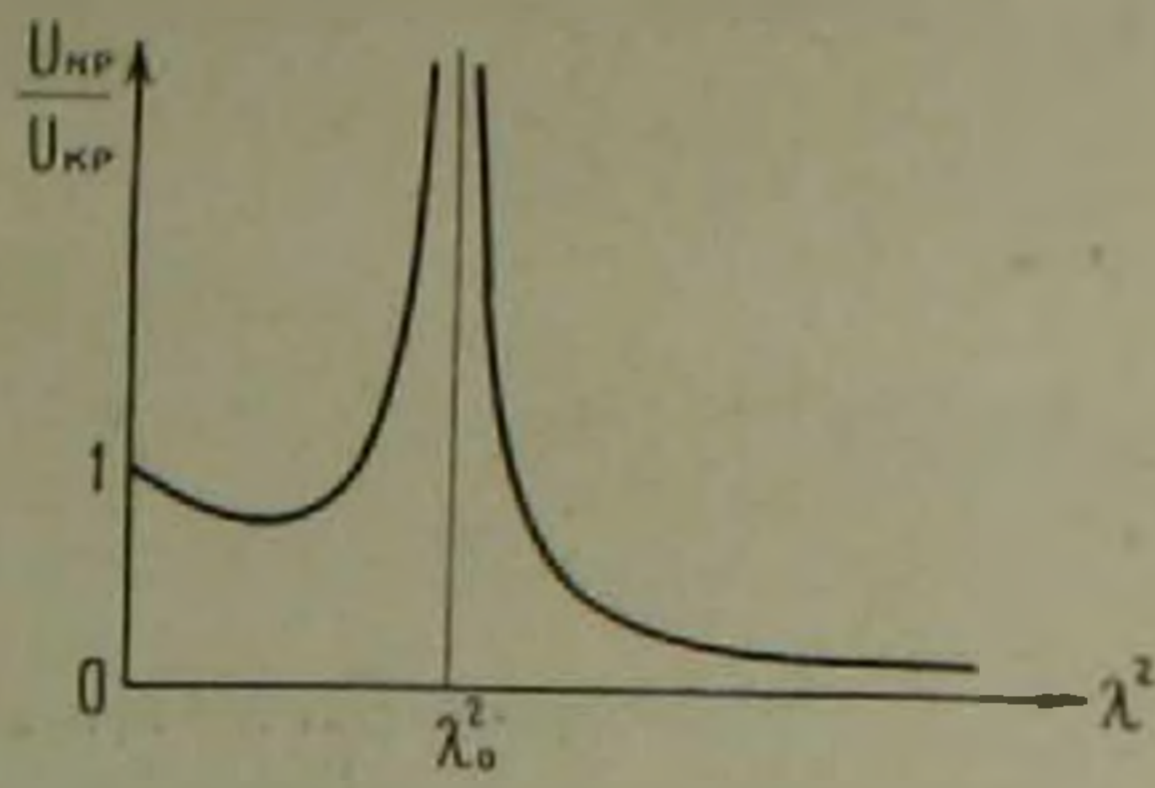

Рис. 2

оказать дестабилизирующее влияние, приводящее к уменьшению критической скорости флаттера.

Институт механики
Академии наук Армянской ССР

Գ. Ե. ԲԱՂԴԱՍԱՐՅԱՆ

Հաղորդիչ սալի կայունությունը մագնիսական դաշտում հաղորդիչ գազի հոսանքով շրջհոսվելիս

Դիտարկված է առաձգական սալի կայունությունն իդեալական հաղորդիչ գազի հոսանքում, երբ սալի նյութն ունի հաստատուն վերջավոր էլեկտրահաղորդականություն։ Արտաքին մագնիսական դաշտի լարվածության վեկտորը ուղղահայաց է գազի հոսանքի արագությանը և զուգահեռ է սալի միջին հարթությանը։

Ելնելով բարակ մարմինների մագնիսաառաձգականության վարկածից և համատեղ լուծելով մագնիտագազադինամիկայի ու սալի շարժման հավասարումները ստացված է բանաձև գազի ճնշումը որոշելու համար։ Վերջինս հանդիսանում է կլասիկ գազադինամիկայում համապատասխան բանաձևի ընդհանրացումը մագնիսական դաշտի առկայության դեպքում։

Ցույց է տրված, որ ի տարբերություն դիէլեկտրիկ սալերի, հաղորդիչ սալերի դեպքում, մագնիսական դաշտի առկայությունը էապես կարող է փոքրացնել կրիտիկական արագության մեծությունը։ Ստացված է պարզ բանաձև կրիտիկական արագության հաշվման համար։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *S. Kaliski, L. Solarz*, Proc. Vibr. Probl., vol. 3, №3 (1962). [2] *Г. Е. Багдасарян, М. В. Белубекян*, МТТ, №6, 1966. [3] *М. И. Киселев* Магнитная гидродинамика, №1, 1966. [4] *И. Т. Селезов, Л. В. Селезова* „Магнитная гидродинамика", №1, 1967. [5] *Р. Н. Овакимян*, „Известия АН Арм. ССР", Механика, т. 20, №4 (1967). [6] *А. С. Вольмир, Л. В. Селезова*, Прикладная механика, т. 7 в 5, (1971). [7] *С. А. Амбарцумян, Г. Е. Багдасарян, М. В. Белубекян* ПММ, т. 35, в. 2,(1971). [8] *С. А. Амбарцумян Г. Е. Багдасарян, М. В. Белубекян* ПММ, т. 37, в. 1 (1973). [9] *S. Kaliski* Proc. Vibr. Probl., vol 3, №4 (1962). [10] *В. В. Болотин* Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости, Физматгиз, М., 1961