УДК 519.14

МАТЕМАТИКА

Г. Г. Геолециян

Плоское размещение вершин дерева на линии с минимизацией ширины

(Представлено академиком АН Армянской ССР С. М. Мергеляном 27/XI 1972)

Рассматриваемая задача возникает при размещении связанных между собой конструктивных единиц на линии и может быть интерпретирована следующим образом.

Ищется размещение конструктивных единиц на линии, допускающее проведение соединений между ними при помощи печатного монтажа, используя при этом минимальное число магистралей.

В ⁽¹⁾ для ориентированного дерева предложен алгоритм размещения, минимизирующего ширину и сохраняющего частичную упорядоченность дерева.

Ниже приводится математическая постановка задачи и алгоритм оптимального размещения.

Пусть $T(X, U)$ неориентированное дерево, U — множество рёбер, а X — множество вершин этого дерева, $|X| = n$. Размещением дерева T на отрезке $[1, n]$ назовём взаимно-однозначное соответствие $\varphi: X \rightarrow N = \{1, 2, \dots, n\}$. Каждой вершине дерева размещением сопоставляется некоторая целочисленная точка отрезка $[1, n]$. Ребру (x, y) соответствует ребро $(\varphi(x), \varphi(y))$. Скажем, что ребра (x_1, y_1) и (x_2, y_2) пересекаются при данном размещении φ , если $\varphi(x_1) < \varphi(x_2) < \varphi(y_1) < \varphi(y_2)$. Ребро (x, y) назовём проходящим над вершиной z при данном размещении φ , если $\varphi(x) < \varphi(z) < \varphi(y)$.

Аналогично ⁽¹⁾ обозначим через $\omega_\varphi(x)$ число рёбер, проходящих над вершиной x при размещении φ . Шириной размещения φ назовём $\max \omega_\varphi(x)$ по всем $x \in X$ и обозначим через $W(\varphi)$. Размещение φ назовём плоским, если при этом размещении ни одна пара рёбер не пересекается. Задача размещения с минимальной шириной заключается в нахождении такого размещения φ_0 , среди всех плоских размещений, чтобы $W(\varphi_0) = \min W(\varphi)$

Алгоритм оптимального размещения состоит из двух частей. В первой части присваиваются метки вершинам дерева и выделяется одна из вершин, во второй части — проводится размещение вершин дерева.

1. Присвоение меток вершинам. Всем висячим вершинам приписывается метка 0. Далее метку может получить только одна из тех вершин, у которых все смежные вершины, кроме разве лишь одной, получили метки. Если все смежные вершины $x_1, \dots, x_r$ с вершиной x уже получили метки $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ ($\alpha_1 \geq \dots \geq \alpha_r$), то вершина x может получить метку $\alpha(x) = \max(\alpha_1, \alpha_2 + 1, \dots, \alpha_{2k-1} + k, \dots)$. Если же одна из смежных вершин x_{r+1} не получила метку, то вершина x может получить метку

$$\alpha(x) = \begin{cases} \beta(x) & , \beta(x) > \gamma(x) \\ \beta(x) + 1 & , \beta(x) = \gamma(x). \end{cases}$$

где

$$\begin{aligned} \beta(x) &= \max(\alpha_1, \alpha_3 + 1, \dots, \alpha_{2k+1} + k, \dots), \\ \gamma(x) &= \max(\alpha_2, \alpha_4 + 1, \dots, \alpha_{2k} + k - 1, \dots). \end{aligned}$$

Среди всех вершин, могущих получить метку, выбирается одна из тех, которые могут получить наименьшую метку, и присваивается ей эта метка. Этот процесс продолжается до тех пор, пока все вершины получают метки.

Вершину, получившую метку последней, обозначим через x_0 . Исходное дерево ориентируется, выбирая в качестве единственного корня вершину x_0 .

2. Размещение вершин дерева. Пусть $x_1, \dots, x_k$ — вершины смежные вершине x_0 и имеющие метки соответственно $\alpha_1, \dots, \alpha_k$. Перенумеруем их по невозрастанию меток $\alpha_1 \geq \dots \geq \alpha_k$ и разделим вершины на две группы: в первую группу отнесем вершины с нечетными номерами, во вторую с четными. Обозначим их через $y_1, \dots, y_s$ и $z_1, \dots, z_t$, а метки, соответствующие им, через $\beta_1 \geq \dots \geq \beta_s$ и $\gamma_1 \geq \dots \geq \gamma_t$, где $s + t = k$ и $s = t$, если k — четное, и $s = t + 1$ если k — нечетное. Если обозначим через $|x_i|$ количество вершин в ориентированном поддереве $D(x_i)$ с корнем x_i , то построим следующее размещение:

$$\begin{aligned} \varphi: D(y_1) \rightarrow [1, |y_1|]; D(y_2) \rightarrow [|y_1| + 1, |y_1| + |y_2|] \dots; D(z_1) \rightarrow \left[\sum_{i=1}^s |y_i| + \right. \\ \left. + 2, \sum_{i=1}^s |y_i| + |z_1| + 1 \right]; \dots D(z_t) \rightarrow [n - |z_1| + 1, n]. \quad \varphi(x_0) = \sum_{i=1}^s |y_i| + 1. \end{aligned}$$

Таким образом на первом шаге размещена вершина x_0 и указаны отрезки, на которых должны быть размещены поддеревья $D(y_i)$ и $D(z_i)$. Далее будем размещать поддеревья.

Пусть на некотором шаге l требуется разместить поддерево $D(v)$, в которое ведет дуга из уже размещенной вершины v_0 , и пусть $\varphi: D(v) \rightarrow [a_v, b_v]$. Аналогично начальному шагу размещения образуем две группы вершин смежных с v и не совпадающих с v_0 :

$y_1^l, \dots, y_p^l$ и $z_1^l, \dots, z_q^l$ с соответствующими метками $\beta_1^l \geq \dots \geq \beta_p^l$ и $\gamma_1^l \geq \dots \geq \gamma_q^l$ и пусть $\varphi(v_0) > b_v$, тогда конкретизируем размещение φ на поддереве $D(v)$ следующим образом:

$$\varphi : D(y_1^l) \rightarrow [a_v, a_v + |y_1^l| - 1]; \quad D(y_2^l) \rightarrow [a_v + |y_1^l|, a_v + |y_1^l| + |y_2^l| - 1],$$

$$\dots D(z_q^l) \rightarrow [a_v + \sum_{i=1}^p |y_i^l| + 1, a_v + \sum_{i=1}^p |y_i^l| + |z_q^l| + 1] \dots;$$

$$D(z_1^l) \rightarrow [b_v - |z_1^l| + 1, b_v]. \quad \varphi(v) = \sum_{i=1}^p |y_i^l| + 1 + a_v$$

Соответствующим образом строится размещение при $\varphi(v_0) < a_v$. В обоих случаях между $\varphi(v_0)$ и $\varphi(v)$ размещаются поддеревья с вершинами $z_1^c, \dots, z_q^c$. Ввиду конечности дерева процесс размещения будет завершён за $n - c$ шагов, где c — число висячих вершин. При этом легко заметить, что φ плоское размещение, $\alpha(x_0) = W(\varphi)$. Для нахождения чисел $|x_i|$ требуется $\sim n^2$ элементарных операций. Нетрудно видеть, что для выполнения всего алгоритма также требуется $\sim n^2$ элементарных операций.

Доказательство оптимальности. Покажем, что любое допустимое размещение (в том числе и оптимальное) можно привести к размещению, данному алгоритмом, не увеличивая при этом ширину размещения.

Указанный процесс производится путем построения плоских размещений $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m$ таких, что $W(\varphi_1) \geq \dots \geq W(\varphi_m)$, где $m \leq n - c$. Размещение φ_i , исходя из размещения φ_{i-1} , переупорядочивает некоторое поддерево $D(z)$, где z — вершина, получившая метку на i -ом шаге. Пусть на каком-то шаге вершина z получила метку $\alpha(z)$. Для простоты заменим поддерево $D(z)$ одной вершиной z^d с шириной $\alpha(z)$. Тем самым мы фиксируем некоторый взаимный порядок вершин $D(z)$. В этом случае предполагаем $\omega_{\varphi}(z^d) = \max_{x \in D(z)} \omega_{\varphi}(x) = \omega_{\varphi}(z) + \alpha(z)$. Таким образом мы будем рассматривать деревья, у которых метки имеют только висячие вершины. Пусть на шаге m вершина x получает метку $\alpha(x)$.

А. Все вершины $x_i^d, i=1, \dots, k$ смежные с x имеют метки $\alpha(x)_i^d$. Такой граф является звездой. Очевидно, размещая вершины x_i^d по алгоритму, мы не увеличиваем ширину размещения. Этот случай возможен лишь на последнем шаге. После этого заменяем вершины x_i^d деревьями $D(x)_i$, сохраняя взаимный порядок между вершинами $D(x)_i$ и x .

В. Существует вершина y , смежная с x , не получившая метку. Так как рассматриваются лишь плоские размещения, то возможны следующие случаи:

$$B_1 : \varphi_{m-1}(y) < \varphi_{m-1}(x_1^d) < \dots < \varphi_{m-1}(x_p^d) < \varphi_{m-1}(x) < \\ < \varphi_{m-1}(x_{p+1}^d) < \dots < \varphi_{m-1}(x_k^d).$$

Над вершинами x и x_i^d проходят одинаковое количество дуг, $\omega_{\varphi_{m-1}}(x)$ штук, отличных от дуг (x, x_i^d) и (y, x) . $\max_{z \in D(x)} \omega_{\varphi_{m-1}}(z) = \max\{\alpha(x_1^d) + 1, \alpha(x_2^d) + 2, \dots, \alpha(x_p^d) + p, \alpha(x_k^d), \alpha(x_{k-1}^d) + 1, \dots\}$

$\alpha(x_{p+1}^d) + k - p - 1 + \omega_{\varphi_{m-1}}(x)$. Упорядочим $\alpha(x_i^d)$ по невозрастанию и разобьём вершины x_i^d на две группы, как в алгоритме размещения.

Получим вершины $y_1, \dots, y_s$ и $z_1, \dots, z_t$ с соответствующими метками $\beta_1 \geq \dots \geq \beta_s$ и $\gamma_1 \geq \dots \geq \gamma_t$. От размещения φ_{m-1} перейдём к размещению φ_m , где $\varphi_m(z) = \varphi_{m-1}(z)$ для всех $z \in D(x)$, $\varphi_m(y) = \varphi_{m-1}(y) < \varphi_m(z_1) < \dots < \varphi_m(z_t) < \varphi_m(x) < \varphi_m(y_s) < \dots < \varphi_m(y_1)$.

Очевидно, что

$$\max_{z \in D(x)} \omega_{\varphi_{m-1}}(z) \geq \max_{z \in D(x)} \omega_{\varphi_m}(z) = \max\{|\beta_1; \beta_2 + 1; \dots; \beta_s + s - 1; \gamma_1 + 1; \gamma_2 + 2; \dots; \gamma_t + t| + \omega_{\varphi_{m-1}}(x)\}$$

Придадим вершине x метку $\alpha(x)$ и поддерево $D(x)$ заменим вершиной x^d с шириной $\alpha(x)$. $\omega_{\varphi_m}(x^d) = \max_{z \in D(x)} \omega_{\varphi_m}(z) = \omega_{\varphi_{m-1}}(x) + \alpha(x)$

$$B_2 \cdot \varphi_{m-1}(x_1^d) < \dots < \varphi_{m-1}(x_p^d) < \varphi_{m-1}(y) < \varphi_{m-1}(x_{p+1}^d) < \dots < \varphi_{m-1}(x) < \varphi_{m-1}(x_{q+1}^d) < \dots < \varphi_{m-1}(x_k^d)$$

Так как φ_{m-1} плоское размещение, то в этом случае все остальные вершины дерева $T(X, U)$ находятся в интервале $(\varphi_{m-1}(x_p), \varphi_{m-1}(x_{p+1}))$.

$$B_{21} \quad |\max_{1 \leq i \leq p} \omega_{\varphi_{m-1}}(x_i^d) < W(\varphi_{m-1})| \vee |\max_{q+1 \leq i \leq k} \omega_{\varphi_{m-1}}(x_i^d) < W(\varphi_{m-1})|$$

Пусть, например, $\max_{g+1 \leq i \leq k} \omega_{\varphi_{m-1}}(x_i^d) < W(\varphi_{m-1})$. В этом случае от размещения φ_{m-1} перейдём к размещению φ_m

$$\varphi_{m-1}(x_1^d) = \varphi_m(x_1^d) < \dots < \varphi_{m-1}(x_p^d) = \varphi_m(x_p^d) < \varphi_m(x_{p+1}^d) < \dots < \varphi_m(x_q^d) < \dots < \varphi_m(x) < \varphi_m(x_{q+1}^d) < \dots < \varphi_m(x_k^d) < \varphi_m(y)$$

При этом $W(\varphi_{m-1}) \geq W(\varphi_m)$, так как $\omega_{\varphi_{m-1}}(x_i^d) = \omega_{\varphi_m}(x_i^d), 1 \leq i \leq p$, $\omega_{\varphi_m}(x_i^d) = \omega_{\varphi_{m-1}}(x_i^d) - 1, p + 1 \leq i \leq q$, $\max_{q+1 \leq i \leq k} \omega_{\varphi_m}(x_i^d) \leq W(\varphi_{m-1})$

После этого можно перейти к случаю B_1 .

$$B_{22} \quad \max_{1 \leq i \leq p} \omega_{\varphi_{m-1}}(x_i) = \max_{q+1 \leq i \leq k} \omega_{\varphi_{m-1}}(x_i) = W(\varphi_{m-1})$$

Покажем, что этот случай невозможен. Нетрудно заметить, что $\alpha(x) = W(\varphi_{m-1}) + 1$. Найдётся хотя бы одна вершина z , которой можно присвоить метку $\alpha(z)$.

Но тогда $\alpha(z) \leq W(\varphi_{m-1}) - p + 1 \leq W(\varphi_{m-1}) < \alpha(x)$.

Согласно алгоритму присваивается наименьшая возможная метка, в то время как $\alpha(x) > \alpha(z)$

На этом доказательство завершается.

Предложенным алгоритмом, ввиду небольшого порядка вычисления, можно найти оптимальное размещение вершин для деревьев с достаточно большим числом вершин.

В заключение выражаю благодарность А. В. Петросяну за ценные советы и внимание к работе.

Ереванский научно-исследовательский институт математических машин

Մառի գազաթների հարթ դասավորության լայնության միևնույնիզացումը գծի վրա

Նկարագրվում է գծի վրա ոչ կոլմնորոշված ժառի գազաթների հարթ դասավորման արդյունավետ մի ալգորիթմ:

Դիցուք տրված է $T(X, U)$ ծառը:

Դասավորություն կանվանենք հետևյալ փոխ-միարժեք արտապատկերումը $\varphi: X \rightarrow N = \{1, \dots, n\}$:

եթե $(x, y) \in Y$, ապա $(\varphi(x), \varphi(y))$ կանվանենք կող $\varphi(l)$ ծառում, որտեղ գազաթներ կհանդիսանան $\varphi(x)$, $x \in X$ կետերը:

(x_1, y_1) և (x_2, y_2) կողերը կանվանենք հատվող, եթե $\varphi(x_1) < \varphi(x_2) < \varphi(y_1) < \varphi(y_2)$:

Այդ դեպքում միևնույնիզացվում է ստացված դասավորության լայնությունը (գազաթների վրայով անցնող կողերի մաքսիմալ թիվը):

Ապացուցվում է ալգորիթմի օպտիմալությունը:

Այդ խնդիրը առաջացել է հաշվիչ մեքենաների ավտոմատիկացված նախագծման ժամանակ և կարող է մեկնաբանվել հետևյալ կերպ. գտնել կոնստրուկտիվ տարրերի այնպիսի մի դասավորություն գծային պլատայի վրա, որ տպագրված մոնտաժի ժամանակ կարելի լինի անցկացնել բոլոր միացումները, օգտագործելով մադիստրալների միևնույն քանակը:

ЛИТЕРАТУРА — ԴՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ P. Реджеевски, Кибернетический сборник, вып. 7, изд. «Мир», М., 1970.