

УДК 513.836

МАТЕМАТИКА

Э. А. Мирзаханиян

Два подхода к определению бесконечномерных гомотопических групп

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александрияном 10/VII 1970)

В этой заметке мы опишем два подхода к определению бесконечномерных гомотопических групп. Первый подход, для несколько другого класса отображений, в общих чертах, описан в заметке ⁽¹⁾ и связан с выбором ортонормированного базиса в гильбертовом пространстве H . Вторым подход не связан с выбором базиса. Установленная ниже эквивалентность обоих подходов показывает независимость, в первом подходе, построенных гомотопических групп от выбора базиса. Основой для дальнейших построений служит класс отображений K , построенный в заметке В. Г. Болтянского ⁽²⁾.

Пусть $e = \{e_1, e_2, \dots, e_n, \dots\}$ некоторый ортонормированный базис пространства H . Через S_i обозначим линейный оператор (с нормой 1), определяемый соотношениями $S_i(e_1) = 0$, $S_i(e_i) = e_{i-1}$ при $i > 1$.

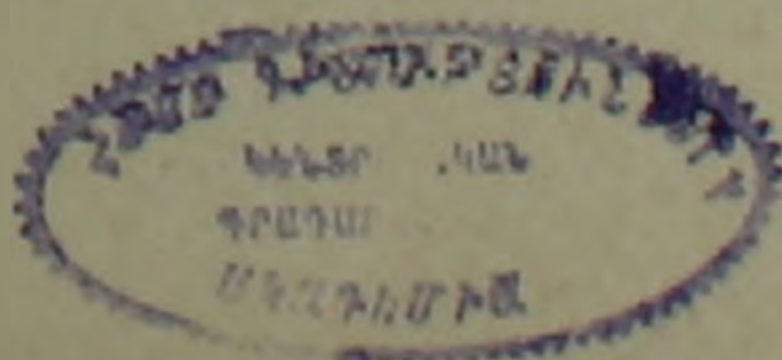
Далее, через T_i обозначим линейный оператор (с нормой 1), определяемый соотношением $T_i(e_i) = e_{i+1}$, $i = 1, 2, \dots$. Мы будем также рассматривать степени $S_i^1 = S_i$, S_i^2 , $S_i^3, \dots$ и $T_i^1 = T_i$, T_i^2 , $T_i^3, \dots$ введенных операторов. Оператор T_i^q является правым обратным для S_i^q , но левым обратным не является.

Условимся говорить, что отображение f пространства H в себя принадлежит классу $K_i^{(q)}$ ($q \geq 0$), если его можно представить в виде $f = \varphi \circ T_i^q$, где $\varphi \in K$. Далее, условимся говорить, что отображение f принадлежит классу $K_i^{(q)}$ ($q \geq 0$), если его можно представить в виде $f = S_i^q \circ \psi$, где $\psi \in K$.

Предложение 1. *Отображение f в том и только в том случае принадлежит классу $K_i^{(q)}$, если $f = S_i^q \circ \psi \in K$ при $q \geq 0$ и $T_i^{-q} \circ f \in K$, при $q \leq 0$.*

Следующее предложение устанавливает зависимость классов отображений $K_i^{(q)}$ от выбора базиса e .

Предложение 2. *Условие $T_i^q \circ S_i^q \in K$ необходимо и доста-*



точно для того, чтобы классы отображений $K^{(q)}$ и $K^{(q')}$ совпадали между собой (а также чтобы классы отображений $K^{(q)}$ и $K^{(q'-q)}$ совпадали между собой).

Заметим, что класс отображений K не удовлетворяет третьему требованию, наложенному на класс отображений в заметке (1); однако это не мешает построению гомотопических групп.

Напомним первый подход к определению гомотопических групп. Через Σ всюду в дальнейшем будет обозначаться единичный шар пространства H , т. е. $\Sigma = \{x \in H, |x| \leq 1\}$. Пусть $x_0 \in H$, отображение $f: H \rightarrow H$ класса $K^{(q)}$ мы будем называть сфероидом индекса q в точке x_0 , если $f(H \setminus \Sigma) = x_0$. Заметим, что при определении сфероидов базис ε предполагается фиксированным.

Пусть f, g — два сфероида индекса q в точке $x_0 \in H$. Положим:

$$h(x) = \begin{cases} f(2x + e_1) & \text{при } x \cdot e_1 \leq 0; \\ g(2x - e_1) & \text{при } x \cdot e_1 > 0. \end{cases} \quad (1)$$

Отображение h также является сфероидом индекса q в точке x_0 и называется суммой сфероидов f и g .

Пусть теперь $X \subset H$. Если сфероид f индекса q в точке x_0 обладает тем свойством, что $f(H) \subset X$, то мы будем его называть сфероидом индекса q множества X в точке x_0 . Ясно, что сумма двух сфероидов индекса q множества X в точке x_0 снова является сфероидом индекса q множества X в точке x_0 . Естественно определяется отношение гомотопности двух сфероидов индекса q множества X в точке x_0 , обладающее свойствами рефлексивности, симметричности и транзитивности (подробнее см. ниже, при описании второго подхода). Благодаря этому все сферонды индекса q множества X в точке x_0 разбиваются на классы гомотопности. Множество всех этих классов обозначим через $\Pi_q^s(X, x_0)$. Введенное выше сложение сфероидов определяет сложение гомотопических классов (по представителям). Относительно определяемой таким образом операции сложения множество $\Pi_q^s(X, x_0)$ оказывается коммутативной группой, которую мы и назовем *гомотопической группой* индекса q множества X в точке x_0 . Эта группа определена для любого целого q (положительного, отрицательного или равного нулю). Таков, вкратце изложенный, первый подход к построению бесконечномерных гомотопических групп. Независимость группы $\Pi_q^s(X, x_0)$ от выбора базиса ε устанавливается сопоставлением первого подхода со вторым, к изложению которого мы теперь переходим.

Подпространство $A \subset H$ будем называть *подпространством дефекта* $q > 0$, если ортогональное дополнение к A (в пространстве H) имеет размерность q . Далее, гильбертово пространство $A' \supset H$ мы будем называть (по отношению к H) *подпространством дефекта* $q \leq 0$, если

A' содержит H в качестве своего подпространства дефекта $-q$. Мы дадим теперь определение класса отображений K_q^* , где q — произвольное целое число. При $q = 0$ определим K_0^* как множество всех отображений $f: H \rightarrow H$, принадлежащих классу K . Если $q > 0$, то под K_q^* будем понимать множество всех отображений $f: A \rightarrow H$, принадлежащих классу K , где $A \subset H$ — некоторое подпространство дефекта q . Наконец, при $q < 0$ под K_q^* будем понимать множество всех отображений $f: A \rightarrow H$, принадлежащих в гильбертовом пространстве A классу K , где $A \supset H$ — некоторое подпространство дефекта q .

Пусть теперь q — некоторое целое число (положительное, отрицательное или равное нулю). Фиксируем некоторое подпространство A пространства H , имеющее дефект q (так что при $q < 0$ имеет место включение $A \supset H$). Пусть далее, Σ_A — единичный шар подпространства A и x_0 — некоторая точка пространства H . Отображение $f: A \rightarrow H$ класса K_q^* мы будем называть сферондом индекса q в точке x_0 , если $f(A \cap \Sigma_A) = x_0$. Для определения суммы сферондом f, g индекса q выберем в A произвольный единичный вектор e , и определим отображение h формулой (1). Отображение h снова является сферондом индекса q в точке x_0 и называется суммой сферондов f и g .

Определим теперь понятие гомотопности двух сферондов. Пусть $f, g: A \rightarrow H$ — два сферонда индекса q в точке $x_0 \in H$. Обозначим через R числовую прямую, а через I — отрезок $[0, 1]$. Прямое произведение $A' = R \times A$ можно рассматривать как гильбертово пространство, для которого A является подпространством дефекта 1. По отношению к исходному пространству H пространство A' можно рассматривать как подпространство дефекта $q - 1$. Отображение $S: I \times A \rightarrow H$ мы будем называть *гомотопией сферондов*, если оно принадлежит классу K_{q-1}^* и, кроме того, для любого $t \in I$ отображение $S_t: A \rightarrow H$, определяемое равенством $S_t(x) = S(t, x)$, $x \in A$ является сферондом индекса q в точке $x_0 \in H$. Если при этом $S_0 = f$, $S_1 = g$, то мы будем говорить, что гомотопия S соединяет сферонды f и g . Два сферонда, которые можно соединить гомотопией, называются *гомотопными* между собой; в частности, можно говорить о сферондах, гомотопных между собой в множестве $X \subset H$.

Теперь, так же как и при первом подходе, определяется *гомотопическая группа* $\Pi_q(X, x_0)$ индекса q множества X в точке x_0 . Заметим, что построение гомотопической группы $\Pi_q(X, x_0)$ зависит при таком подходе одного элемента произвола, а именно, от выбора фиксированного пространства A индекса q . Однако без труда доказывается, что, с точностью до изоморфизма, группа $\Pi_q(X, x_0)$ не зависит от выбора подпространства A . Действительно, пусть A_1 и A_2 — два подпространства индекса q . Тогда существует линейное обратимое отображение $\varphi: A_1 \rightarrow A_2$, принадлежащее классу K . Два сферонда $f_1: A_1 \rightarrow H$ и $f_2: A_2 \rightarrow H$ условимся считать эквивалентными, если $f_1 = f_2 \circ \varphi$. Этим устанавливается взаимно однозначное соответствие между сферондами $f_1: A_1 \rightarrow H$ и сферондами $f_2: A_2 \rightarrow H$ (индекса q).

При переходе к гомотопическим классам это соответствие превращается в изоморфизм гомотопических групп $\Pi_q(X, x_0)$, построенных с помощью подпространства A_1 и подпространства A_2 .

Таков, вкратце изложенный, второй подход к построению бесконечномерных гомотопических групп.

Предложение 3. Оба рассмотренных подхода равносильны т. е. группы $\Pi_q(X, x_0)$, построенная при втором подходе, изоморфна группе $\Pi'_q(X, x_0)$, построенной при первом подходе (при любом выборе базиса ε). Отсюда, в частности, следует, что группы $\Pi'_q(X, x_0)$, построенные для различных базисов ε , изоморфны между собой.

Доказательство основано на следующих соображениях (при изложении которых мы ограничимся, для определенности, случаем $q > 0$). Пусть ε — произвольный ортонормированный базис пространства H . Обозначим через A ортогональное дополнение к подпространству, натянутому на первые q векторов этого базиса (так что A есть подпространство дефекта q). Далее, каждому сферонду $f: H \rightarrow H$ (построенному при первом подходе) мы сопоставим отображение $f \circ S^q: A \rightarrow H$. Легко видеть, что это отображение является сферондом в смысле второго подхода. Соответствие $f \mapsto f \circ S^q$ и устанавливает изоморфизм $\Pi'_q(X, x_0) \cong \Pi_q(X, x_0)$ (где вторая группа построена при использовании A в качестве фиксированного подпространства дефекта q).

Заметим в заключение, что предложение 3 (вместе с построением гомотопических групп) остается в силе и при условии, что на рассматриваемые отображения, кроме требования принадлежности классу K накладываются другие ограничения. Например, можно дополнительно потребовать, чтобы все сферонды $f: H \rightarrow X$, участвующие в определении гомотопической группы $\Pi_q(X, x_0)$ (или $\Pi'_q(X, x_0)$), обладали тем свойством, что для любой точки $x \in X - x_0$ прообраз $f^{-1}(x)$ компактен. При таком понимании можно к изучению гомотопических групп применять введенное в нашей совместной работе ⁽¹⁾ понятие степени отображения.

Институт математики и механики
Академии наук Армянской ССР

Է. Ա. ԽԻՐՉԱԿՅԱՆՅԱՆ

Անվերջ չափանի հոմոտոպիկ խմբերի սահմանման երկու եղանակների մասին

Հոդվածում նկարագրված է հիլբերտային տարածության ենթատարածությունների անվերջ չափանի հոմոտոպիկ խմբերի սահմանման երկու տարրեր եղանակները:

Առաջին եղանակը, որն կախված է սրբնետրմայի քաղիսի բնութագրից, բնականորեն գծերով նկարագրված է ⁽¹⁾ հոդվածում, բայց արտապատկերումների մի այլ դասի համար, մինչդեռ երկրորդ եղանակը կապված չէ քաղիսի բնութագրի հետ: Ապացուցվում է այդ երկու սահմանումների համարժեքությունը, որից հետևում է, որ առաջին սահմանումն եւ անկախ է քաղիսի բնութագրից:

Л И Т Е Р А Т У Р А — Ъ Р Ц Ы П Ъ Р В А Р Ъ

1 Э. А. Мирзаканян, ДАН Арм ССР, т. XLIII, № 1 (1966). 2 В. Г. Болгачевский, ДАН Арм ССР, т. LI, № 3 (1970). 3 В. Г. Болгачевский и Э. А. Мирзаканян, ДАН Арм ССР, т. LI, № 4, (1970)