ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

XLVIII 1969 2

УДК 518

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

С. М. Мхитарян

Об эффективном решении некоторых классов линейных интегральных уравнений первого рода и связанных с ними дифференциальных уравнениях

(Представлено академиком АН Армянской ССР Н. Х. Арутюняном 23/X 1968)

Заметка посвящена решению методом М. Г. Крейна некоторых классов интегральных уравнений первого рода и связанных с ними дифференциальных уравнений. Предварительно приводится один общий результат М. Г. Крейна, относящийся к связи между интегральными уравнениями с ядрами, зависящими от разности аргументов, и дифференциальными уравнениями. Отправляясь от этого результата, составляются для рассматриваемых интегральных уравнений первого рода соответствующие им дифференциальные системы. Фундаментальные функции эквивалентных им канонических систем образуют в пространстве $L^2(0, T)$ двумерных вектор-функций, по-видимому, новый класс ортогональных полных систем функций. В качестве иллюстрирующего примера приведены формулы разложения двумерной вектор-функции из $L^2(0, \infty)$ по функциям Уиттекера.

1. В своих исследованиях ([1–4]) по обратным задачам спектральной теории дифференциальных операторов М. Г. Крейн, в частности, получил следующие результаты.

Пусть $K(t) = \overline{K(-t)}$ $(-2T < t < 2T)$ измеримая, локально суммируемая функция, удовлетворяющая следующему условию: при любом r $(0 \leqslant r < T)$ интегральное уравнение

$$q(t, r) + \int_{-r}^{r} K(t-s)\, q(s, r)\, ds = 1$$

имеет единственное ограниченное (а значит и непрерывное) решение* $q(t, r)$. Для любого комплексного λ положим

$$\chi(r, \lambda) = \frac{\lambda}{2} \int_{-r}^{r} q(s, r) e^{-i\lambda s}\, ds. \tag{1}$$

* Это условие эквивалентно условию положительной определенности в квадрате $T < t,\ s < T$ эрмитового ядра $K(t-s)$ (см. ([6]) гл. IV, § 8).

Функция $\chi(r, \lambda)$ оказывается решением дифференциальной системы*

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{p(r)}\frac{d\chi}{dr}\right) + [\lambda^2 + 2\lambda\, l(r)]\,\frac{\chi}{p(r)} = 0,\quad \chi(0, \lambda) = 0,\quad \chi'(0, \lambda) = \lambda, \qquad (2$$

где $p(r) = |q(r, r)|^2$, $l(r) = -\dfrac{d}{dr}\operatorname{Arg} q(r, r) \quad (0 \leqslant r < T)$.

Эту дифференциальную систему можно преобразовать к канони- ческой системе из двух уравнений, после чего получаются формулы обобщенного преобразования Фурье для произвольной двумерной век- тор-функции из $L_H^2(0, T)$. Они имеют вид

$$F(\lambda) = \int_0^T \| f_1(r), f_2(r) \| \, H(r) \begin{Vmatrix} \Phi(r, \lambda) \\ \Psi(r, \lambda) \end{Vmatrix} dr, \qquad (3$$

$$\begin{Vmatrix} f_1(r) \\ f_2(r) \end{Vmatrix} = \int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda) \begin{Vmatrix} \Phi(r, \lambda) \\ \Psi(r, \lambda) \end{Vmatrix} d\sigma(\lambda), \qquad (4$$

где

$$H(r) = \begin{Vmatrix} \dfrac{1}{p(r)} + V^2(r)\, p(r) & V(r)\, p(r) \\ V(r)\, p(r) & p(r) \end{Vmatrix},$$

$$V(r) = -2\int_0^r \frac{l(t)}{p(t)}\, dt, \qquad \begin{Vmatrix} \Phi \\ \Psi \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ -V(r) & 1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \chi(r, \lambda) \\ \dfrac{d\chi}{dr} / \lambda p(r) \end{Vmatrix},$$

а $\sigma(\lambda)$ $(\sigma(\lambda) = \sigma(\lambda - 0),\ \sigma(0) = 0\ -\infty < \lambda < \infty)$ — ортогональная спект- ральная функция граничной задачи (2). Если $T = \infty$, то функци $\sigma(\lambda)$ единственным образом определяется из представления:

$$\int_0^t (t - s)\, K(s)\, ds = \int_{-\infty}^{\infty} \left(1 + \frac{i\lambda t}{1 + \lambda^2} - e^{i\lambda t}\right) \frac{d\sigma(\lambda)}{\lambda^2} + \left(i\gamma - \frac{1}{2}\operatorname{sign} t\right) t,$$

где γ — некоторое вещественное число. А если $T < \infty$, то, вообще го- воря, для определения функции $\sigma(\lambda)$ (спектра задачи (2)) следуе добавить граничное условие на конце $r = T$, например, следующе $\chi'(T, \lambda) = 0$.

Приведенный результат М. Г. Крейна имеет место и для опре- деленных классов интегральных уравнений первого рода. В этом слу чае вместо ограниченности решения $q(t, r)$ следует требовать ег интегрируемость (см. ([1])), причем $p(r)$ будет уже определяться ра венствами

$$p(r) = M'(r), \text{ где } M(r) = \frac{1}{2}\int_{-r}^{r} q(s, r)\, ds, \qquad (5$$

---

* Из-за недостатка места этот результат был изложен в ([3]) лишь для случа вещественного $K(t)$. М. Г. Крейн любезно предоставил автору возможность по пер воначальному тексту статьи ([3]) познакомиться с излагаемым результатом и указа на возможность его вывода из ([4]).

а граничные условия $\chi'(0,\lambda)=\lambda$, $\chi'(T,\lambda)=0$ заменятся соответственно условиями

$$\lim_{r\downarrow 0}\left(\frac{1}{p}\frac{d\chi}{dr}\right)=\lambda,\quad \lim_{r\uparrow T}\left(\frac{1}{p}\frac{d\chi}{dr}\right)=0.$$

На основе указанной связи между интегральными и дифференциальными уравнениями М. Г. Крейн предложил новый метод решения интегральных уравнений ([5–7]).

2. Рассматриваемые нами интегральные уравнения первого рода имеют вид

$$\int_{-a}^{a} K(t-s)\,\varphi(s)\,ds=f(t), \tag{6}$$

где эрмитово ядро $K(t-s)$ порождается одной из следующих семи функций $K(t)$ $(-2T<t<2T)$:

1) $\ln\dfrac{1}{2\sin\frac{|t|}{2}}-\dfrac{i\pi}{2}\,\mathrm{th}\,\pi\mu\,\mathrm{sign}\,t\quad(T\leqslant\pi;\quad -\infty<\mu<\infty);$

2) $\ln\dfrac{1}{2\,\mathrm{sh}\frac{|t|}{2}}-\dfrac{i\pi}{2}\,\mathrm{th}\,\pi\mu\,\mathrm{sign}\,t\quad(T\leqslant 2\ln(1+\sqrt{2});\ -\infty<\mu<\infty);$

3) $\ln\mathrm{ctg}\,\dfrac{|t|}{4}-\dfrac{i\pi}{2}\,\mathrm{th}\,\pi\mu\,\mathrm{sign}\,t\quad(T\leqslant\pi;\quad -\infty<\mu<\infty);$

4) $\ln\mathrm{cth}\,\dfrac{|t|}{4}-\dfrac{i\pi}{2}\,\mathrm{th}\,\pi\mu\,\mathrm{sign}\,t\quad(T\leqslant\infty;\quad -\infty<\mu<\infty);$

5) $(1-i\mu\,\mathrm{sign}\,t)/|t|^h\ \left(T=\infty;\quad 0<h<1;\quad |\mu|<\mathrm{tg}\,\dfrac{\pi h}{2}\right);$

6) $(1-i\mu\,\mathrm{sign}\,t)\,e^{\frac{iht}{2}}\Big/\left(2\sin\dfrac{|t|}{2}\right)^h\left(T\leqslant\pi;\quad 0<h<1;\quad |\mu|<\mathrm{tg}\,\dfrac{\pi h}{2}\right);$

7) $(1-i\mu\,\mathrm{sign}\,t)\ e^{\frac{iht}{2}}\Big/\left(2\,\mathrm{sh}\,\dfrac{|t|}{2}\right)^h\left(T\leqslant\infty;\quad 0<h<1;\quad |\mu|<\mathrm{tg}\,\dfrac{\pi h}{2}\right).$

Здесь T такое число, что квадрат $-T<t,\ s<T$ является максимальной областью положительной определенности соответствующего ядра. Оно может определяться из равенства: $M(T)=\infty$.

Отметим еще четыре ядра, порождаемые следующими функциями*

8) $1\Big/\left(2\sin\dfrac{|t|}{2}\right)^h;$ 9) $1\Big/\left(2\,\mathrm{sh}\,\dfrac{|t|}{2}\right)^h;$

* Они получаются из 6) и 7).

10) $e^{\frac{iht}{2}}/\left(2\sin\frac{|t|}{2}\right)^h$; 11) $(1-i\mu\,\mathrm{sign}\,t)/\left(2\,\mathrm{sh}\,\frac{|t|}{2}\right)^h$.

Приведем выражение $q(t, a)$ — решений интегральных уравнений (6) при $f(t)\equiv 1$ соответственно случаям 1)—6):

$$1)\ \frac{1}{A_\mu(a)}\cos\left(\frac{t}{2}-i\mu a\right)\left(\sin\frac{a-t}{2}\right)^{-\frac{1}{2}-i\mu}\left(\sin\frac{a+t}{2}\right)^{-\frac{1}{2}+i\mu},$$

где

$$A_\mu(a)=\frac{\pi}{2\,\mathrm{ch}\,\pi\mu}\left|\ B_{\exp(2ia)}\left(\frac{1}{2}-i\mu, 0\right)+B_{\exp(2ia)}\left(\frac{1}{2}+i\mu, 0\right)+\right.$$

$$\left.+2i\,\mathrm{Im}\,\psi\left(\frac{1}{2}+i\mu\right)-2\psi\left(\frac{1}{2}-i\mu\right)+2\psi(1)-2\ln 2\sin a-2\pi i\,\mathrm{th}\pi\mu-i\pi\right|;$$

$$2)\ \frac{1}{B_\mu(a)}\,\mathrm{ch}\left(\frac{t}{2}-i\mu a\right)\left(\mathrm{sh}\frac{a-t}{2}\right)^{-\frac{1}{2}-i\mu}\left(\mathrm{sh}\frac{a+t}{2}\right)^{-\frac{1}{2}+i\mu},$$

где

$$B_\mu(a)=\frac{\pi}{2\,\mathrm{ch}\,\pi\mu}\left\{2\,\mathrm{Re}\left[B_{\exp(2a)}\left(\frac{1}{2}+i\mu, 0\right)\right]+2i\,\mathrm{Im}\,\psi\left(\frac{1}{2}+i\mu\right)-\right.$$

$$\left.-2\psi\left(\frac{1}{2}-i\mu\right)+2\psi(1)-2\ln 2\,\mathrm{sh}\,a-2\pi i\,\mathrm{th}\,\pi\mu\right\};$$

$$3)\ \frac{\mathrm{ch}\,\pi\mu}{\pi\left[Q_{-\frac{1}{2}-i\mu}(\cos a)+Q_{-\frac{1}{2}+i\mu}(\cos a)\right]}\times$$

$$\times\left(\sin\frac{a-t}{2}\right)^{-\frac{1}{2}-i\mu}\left(\sin\frac{a+t}{2}\right)^{-\frac{1}{2}+i\mu};$$

$$4)\ \frac{\mathrm{ch}\,\pi\mu}{\pi\left[Q_{-\frac{1}{2}-i\mu}(\mathrm{ch}\,a)+Q_{-\frac{1}{2}+i\mu}(\mathrm{ch}\,a)\right]}\times$$

$$\times\left(\mathrm{sh}\frac{a-t}{2}\right)^{-\frac{1}{2}-i\mu}\left(\mathrm{sh}\frac{a+t}{2}\right)^{-\frac{1}{2}+i\mu};$$

5) $C_\mu(a-t)^{\alpha+i\beta}(a+t)^{\alpha-i\beta}$, где $C_\mu=\sin\pi h/2\pi\times$

$$\times\sqrt{\sin^2\frac{\pi h}{2}-\mu^2\cos^2\frac{\pi h}{2}},$$

$$\alpha+i\beta=-\frac{1}{\pi}\arcsin\left[(1+i\mu)C_\mu\right];$$

$$6)\ 2^{h-1}C_\mu\,e^{-a\beta}\,e^{-\frac{h-1}{2}it}\left(\sin\frac{a-t}{2}\right)^{\alpha+i\beta}\left(\sin\frac{a+t}{2}\right)^{\alpha-i\beta}.$$

По формуле (5) получим соответствующие выражения $M(a)$:

1) $\pi/\mathrm{ch}\pi\mu\, A_\mu(a)$; 2) $\pi/\mathrm{ch}\pi\mu\, B_\mu(a)$;

3) $P_{-\frac{1}{2}-i\mu}(\cos a)/[Q_{-\frac{1}{2}-i\mu}(\cos a)+Q_{-\frac{1}{2}+i\mu}(\cos a)]$;

4) $P_{-\frac{1}{2}-i\mu}(\operatorname{ch} a)/[Q_{-\frac{1}{2}-i\mu}(\operatorname{ch} a)+Q_{-\frac{1}{2}+i\mu}(\operatorname{ch} a)]$;

5) $2^{2\alpha}C_\mu a^{2\alpha+1}/\Gamma(\alpha+1+i\beta)|^2/\Gamma(2\alpha+2)$;

6) $$2^{h-2}C_\mu(\sin a)^{2\alpha+1}e^{i\left(\alpha+\frac{h-1}{2}\right)a}\frac{|\Gamma(\alpha+1+i\beta)|^2}{\Gamma(2\alpha+2)}\times$$

$$\times F\left(\alpha+\frac{h-1}{2}, 1+\alpha-i\beta; 2\alpha+2; 1-e^{2ia}\right).$$

В этих формулах $B_\cdot(x, y)$ означает неполную бэта-функцию [8], $\psi(z)$ и $\Gamma(z)$—функции Эйлера [8], $P_\nu(z)$ и $Q_\nu(z)$—функции Лежандра первого и второго рода [8], $F(a, b; c; z)$—гипергеометрическая функция [8].

В случаях 1), 2), 4) и 5) выражения $q(t, a)$, когда $\mu=0$, были получены М. Г. Крейном [6] при помощи контурных интегралов. Приведенные выражения $q(t, a)$ (для случаев* 1)—5) см. [9]), получены путем дальнейшего развития этого метода.

Интегральными уравнениями (6) в случаях 1)—4) описываются некоторые плоские контактные задачи теории упругости с учетом сил сцепления или трения [9]. Интегральное уравнение (6) в случае 5) встречается в плоских контактных задачах нелинейной теории ползучести, исследованных в работе Н. Х. Арутюняна [11] и в работе Н. Х. Арутюняна и М. М. Манукяна [12].

Коль скоро известны выражения $q(t, a)$, решения интегральных уравнений (6) для любого $f(t)$ в случаях** 1)—6) могут быть получены по известному правилу М. Г. Крейна (см. [6], гл. IV, § 8).

3. Для составления соответствующих дифференциальных систем (2) приведем выражения функции $l(r)$. Они будут***:

1) $$-\frac{2\mu\sin r+\operatorname{sh}2\mu r}{4\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{r}{2}\operatorname{th}^2\mu r\right)\cos^2\frac{r}{2}\operatorname{ch}^2\mu r}-\mu\operatorname{ctg} r;$$

2) $$\frac{2\mu\operatorname{sh} r+\sin 2\mu r}{4\left(1+\operatorname{th}^2\frac{r}{2}\operatorname{tg}^2\mu r\right)\operatorname{ch}^2\frac{r}{2}\cos^2\mu r}-\mu\operatorname{cth} r;$$

3) $-\mu\operatorname{ctg} r$; 4) $-\mu\operatorname{cth} r$; 5) β/r; 6) $\frac{h-1}{2}+\beta\operatorname{ctg} r$.

---

* Случай 3), когда $\mu=0$ рассмотрено в [10].

** В случаях 7), 8), 9) и 11) функции $q(t, a)$ имеют довольно сложный вид и не выражаются через известные специальные функции. Тем не менее, решения уравнения (6) в указанных случаях могут быть получены по правилу М. Г. Крейна.

*** В обсуждаемых нами случаях $q(t, r)$ состоит из двух множителей, один из которых при $t=r$ обращается в бесконечность. Следует считать, что аргумент этого множителя равен нулю.

Фундаментальные функции $\chi(r, \lambda)$, получающиеся по формуле (1) соответственно имеют вид

$$1)\ \frac{\lambda\pi}{2\operatorname{ch}\pi\mu A_\mu(r)}\left[e^{i\lambda r}F\left(-\lambda, \frac{1}{r}+i\mu;\ 1;\ 1-e^{-2ir}\right)+\right.$$
$$\left.+e^{-i\lambda r}F\left(\lambda, \frac{1}{2}-i\mu;\ 1;\ 1-e^{-2ir}\right)\right];$$

$$2)\ \frac{\lambda\pi}{2\operatorname{ch}\pi\mu B_\mu(r)}\left[e^{i\lambda r}F\left(-i\lambda, \frac{1}{2}+i\mu;\ 1;\ 1-e^{-2r}\right)+\right.$$
$$\left.+e^{-i\lambda r}F\left(i\lambda, \frac{1}{2}-i\mu;\ 1;\ 1-e^{-2r}\right)\right];$$

$$3)\ \frac{\lambda e^{-\mu r}e^{-\left(\frac{1}{2}+\lambda\right)ir}}{Q_{-\frac{1}{2}-i\mu}(\cos r)+Q_{-\frac{1}{2}+i\mu}(\cos r)}F\left(\frac{1}{2}+\lambda, \frac{1}{2}-i\mu;\ 1;\ 1-e^{-2ir}\right);$$

$$4)\ \frac{\lambda e^{i\mu r}e^{-\left(\frac{1}{2}+i\mu\right)ir}}{Q_{-\frac{1}{2}-i\mu}(\operatorname{ch}r)+Q_{-\frac{1}{2}-i\mu}(\operatorname{ch}r)}F\left(\frac{1}{2}+i\lambda, \frac{1}{2}-i\mu;\ 1;\ 1-e^{-2r}\right);$$

$$5)\ 2^{h-1}C_\mu\,|\Gamma(\alpha+1+i\beta)|^2\left(\frac{r}{\lambda}\right)^\alpha M_{i\beta,\,\alpha+\frac{1}{2}}(-2i\lambda r)/(-i)^{\alpha+1}\,\Gamma(2\alpha+2);$$

$$6)\ 2^{h-2}C_\mu\,|\Gamma(\alpha+1+\beta)|^2\,\lambda e^{\left(i\alpha+\frac{h+1}{2}+i\lambda\right)r}(\sin r)^{2\alpha+1}\times$$
$$\times F\left(\alpha+\frac{h+1}{2}+i\lambda,\ 1+\alpha-i\beta;\ 2\alpha+2;\ 1-c^{2ir}\right)/\Gamma(2\alpha+2).$$

Здесь через $M_{\lambda,\mu}(z)$ обозначена функция Уиттекера ([5]).

Полученные выражения для $M(r)$, $l(r)$ и $\chi(r, \lambda)$ в указанных случаях позволяют выписать формулы (3) и (4) обобщенного преобразования Фурье. В качестве примера рассмотрим случай 5). В этом случае имеет место представление

$$\frac{1-i\mu\operatorname{sign}t}{|t|^h}=\frac{\Gamma(1-h)}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\lambda t}\left(\sin\frac{\pi h}{2}-\mu\cos\frac{\pi h}{2}\operatorname{sign}\lambda\right)|\lambda|^{h-1}d\lambda\ (-\infty<t<\infty)$$

с неотрицательной спектральной плотностью при $|\mu|<\operatorname{tg}(\pi h/2)$, в силу чего порождаемое левой частью эрмитово ядро является положительно определенным в квадрате $-\infty<t, z<\infty$. Таким образом, в рассматриваемом случае $T=\infty$, а спектральная функция $\sigma(\lambda)$ выражается формулой:

$$\sigma(\lambda)=\frac{\Gamma(1-h)}{\pi}\int_0^\lambda\left(\sin\frac{\pi h}{2}-\mu\cos\frac{\pi h}{2}\operatorname{sign}\tau\right)|\tau|^{h-1}d\tau.$$

формулы (3) и (4) обобщенного преобразования Фурье в данном случае будут иметь вид:

$$F(\lambda)=\int_0^\infty \left\|f_1(r), f_2(r)\right\| \begin{Vmatrix} (\alpha^2+\beta^2)/\lambda D_\mu r^{2\alpha} & \beta \\ \beta & \lambda D_\mu r^{2\alpha}\end{Vmatrix} \times$$

$$\times \begin{Vmatrix} \lambda D_\mu \varphi(r,\lambda) \\ r^{-\alpha}\dfrac{d}{dr}\left[r^\alpha\varphi(r,\lambda)\right] - \dfrac{\lambda\beta}{r}\varphi(r,\lambda)\end{Vmatrix} dr,$$

$$S(r)\begin{Vmatrix} f_1(r) \\ f_2(r)\end{Vmatrix}=\frac{\Gamma(1-h)}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda)\begin{Vmatrix} \lambda D_\mu \varphi(r,\lambda) \\ r^{-\alpha}\dfrac{d}{dr}\left[r^\alpha\varphi(r,\lambda)\right] - \dfrac{\lambda\beta}{2}\varphi(r,\lambda)\end{Vmatrix}\times$$

$$\times\left(\sin\frac{\pi h}{2}-\mu\cos\frac{\pi h}{2}\operatorname{sign}\lambda\right)|\lambda|^{h-1}\,d\lambda,$$

где

$$\varphi(r,\lambda)=M_{i\beta,\,\alpha+\frac{1}{2}}(-2i\lambda r),\quad S(r)=\alpha^2(2\alpha+1)^2(-2i\lambda r)^{2\alpha+2}/r^2,$$

$$D_\mu=(2\alpha+1)\,C_\mu\,|\Gamma(\alpha+1+i\beta)|^2/\Gamma(2\alpha+2),\ \arcsin\left[(1+i\mu)\,C_\mu\right]\geqslant 0.$$

Когда $\mu=0$, эти формулы переходят в известные формулы интегрального преобразования Ханкеля.

Считаю своим приятным долгом выразить искреннюю признательность член-корр. АН УССР М. Г. Крейну за руководство работой.

Институт математики и механики
Академии наук Армянской ССР
Одесский инженерно-строительный институт

Ս. Մ. ՄԽԻԹԱՐՅԱՆ

Առաջին սեռի գծային ինտեգրալ հավասարումների մի քանի դասերի էֆեկտիվ լուծման ու նրանց հետ կապված դիֆերենցիալ հավասարումների մասին

Մ. Գ. Կրեյնի առաջարկած մեթոդով (5,6) հոդվածում կառուցվում են էրմիտյան կորիզներով (6) ինտեգրալ հավասարումների էֆեկտիվ լուծումները։ Ընդսմին այդ կորիզները կախված են արգումենտների տարբերությունից ու ծնվում են բերված 1)—7) ֆունկցիաներից մեկնումեկով։

Նշված ինտեգրալ հավասարումների լուծմանն են բերվում առաձգականության տեսության հարակցման կամ շփման ուժերի հաշվառումով (տես (3) ու Ն. Խ. Հարությունյանի դրվածքով սողքի ոչ-գծային տեսության) (տես (11,12)) հպման մի քանի խնդիրների հետազոտությունը։

Նախապես բերվում է Մ. Գ. Կրեյնի՝ արգումենտների տարբերությունից կախված կորիզներով ինտեգրալ հավասարումների ու դիֆերենցիալ հավասարումների միջև եղած կապին վերաբերող մի ընդհանուր արդյունք։ Հիմնվելով այդ արդյունքի վրա, կազմվում են առաջին սեռի նշված ինտեգրալ հավասարումներին համապատասխանող դիֆերենցիալ սիստեմները։ Վերջիններին համարժեք կանոնական սիստեմների հիմնադիր ֆունկցիաները երկչափ վեկտոր-ֆունկցիաների $L^2(0,T)$ տարածության մեջ կազմում են օրթոգոնալ լրիվ ֆունկցիաների, ըստ երևույթին նոր դաս։ Որպես օրինակ բերված են $L^2(0,\infty)$ տարածությանը պատկանող կամայական երկչափ վեկտոր-ֆունկցիայի ըստ Ուիթեկերի ֆունկցիաների վերլուծության բանաձևերը։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *М. Г. Крейн*. ДАН СССР, т. 94, № 6, (1954). [2] *М. Г. Крейн*. ДАН СССР, т. 97, № 1 (1954). [3] *М. Г. Крейн*. ДАН СССР, т. 105, № 3 (1955). [4] *М. Г. Крейн*. ДАН СССР, т. 105, № 4 (1955). [5] *М. Г. Крейн*. ДАН СССР, т. 100. № 3 (1955). [6] *И. Ц. Гохберг*. *М. Г. Крейн*. Теория вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве и ее приложения, „Наука", 1967. [7] *С. М. Мхитарян*, Мат. исслед. Кишинев. 3: 1 (7) (1968). [8] *И. С. Градштейн*, *И. М. Рыжик*. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, Физматгиз, М., 1962. [9] *С. М. Мхитарян*, „Известия АН АрмССР", механика, т. 3, № 6 (1968). [10] *Г. Я. Попов*, Известия АН СССР, Механика, № 4 (1965). [11] *Н. Х. Арутюнян*. ПММ, т. 23. № 5 (1959). [12] *Н. Х. Арутюнян* и *М. М. Манукян*. ПММ, т. 27, № 5 (1963).