

МАТЕМАТИКА

УДК 519.1.

С. Е. Маркосян

Базы дуг прогрессивно и регрессивно конечного
ориентированного графа

(Представлено академиком АН Армянской ССР С. Н. Мергеляном, 20/XII 1967)

Как известно, произвольный конечный ориентированный граф (орграф) обладает базой дуг. Однако, как показывает орграф, изображенный на рис. 1, не все бесконечные орграфы обладают этим свойством. Здесь мы не будем специально рассматривать вопрос какие орграфы имеют базы дуг, только выделим класс орграфов, где входящие элементы имеют базы дуг, и опишем, как найти все эти базы. Мы придерживаемся терминологии и обозначений, принятых А. А. Зыковым (¹).

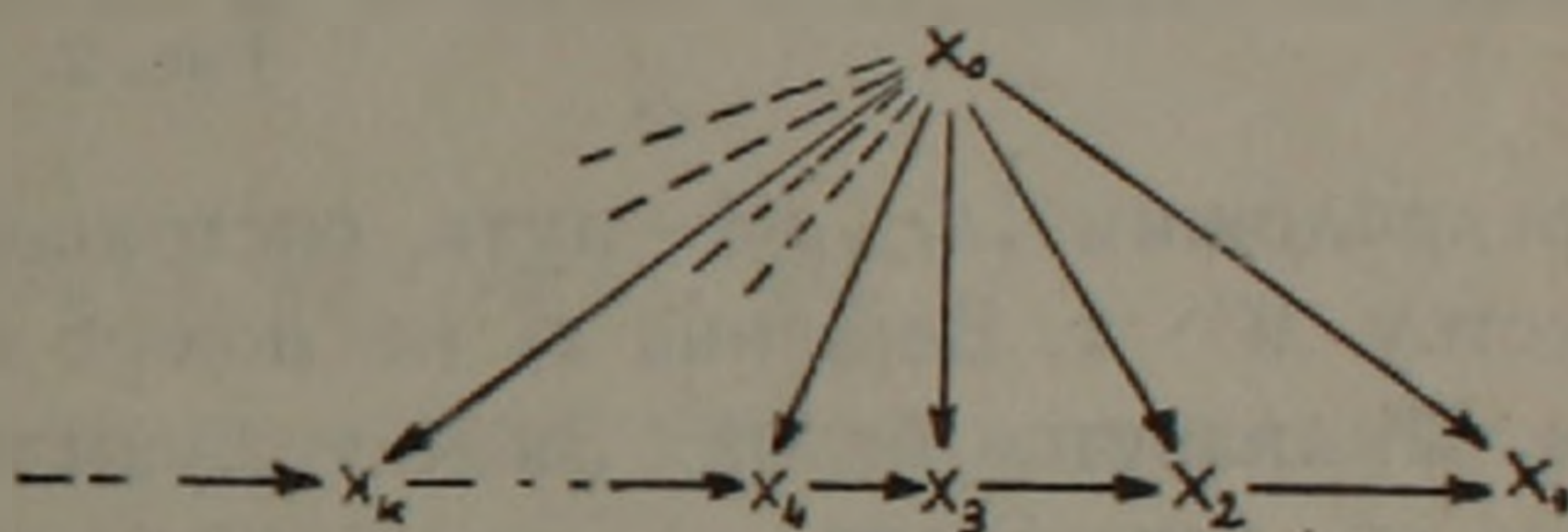


Рис. 1.

Пусть $L = (X, U, P)$ — прогрессивно и регрессивно конечный орграф.

Упорядоченную пару двух подграфов $\{L_i = (X_i, U_i; P), L_j = (X_j, U_j; P)\}$ назовем базовой, а множество дуг $U_{i,j}$, исходящих из L_i и заходящих в L_j , — порождающее, если подграфы L_i и L_j удовлетворяют следующим условиям:

- а) L_i и L_j бисвязные,
- б) $X_i \cap X_j = \emptyset$,
- в) в суграфе $(X, U \setminus U_{i,j}, P_{ij})$

выполнено $\forall x_i \in X_i \forall x_j \in X_j \bar{D}_{U \setminus U_{i,j}}(x_i, x_j)$, где $D_{U \setminus U_{i,j}}(x_i, x_j)$ означает достижимость x_j от x_i с помощью дуг $U \setminus U_{i,j}$.

Теорема. Система дуг $W \subseteq U$ орграфа $L = (X, U, P)$ является базой тогда и только тогда, когда выполнены следующие два условия:

- 1) для любого порождающего множества $U_{i,j}$ $U_{i,j} \cap W \neq \emptyset$;
- 2) для любой дуги $u \in W$ существует такое порождающее множество U_{i_0,j_0} , что $U_{i_0,j_0} \cap W = \{u\}$.

Сначала докажем необходимость. Пусть W является базой дуг орграфа $L = (X, U, P)$. Условие 1) очевидно выполнено, докажем условие 2).

Возьмем произвольный $u \in W$. Покажем, что существуют базовая пара $\{L_{i_0}, L_{j_0}\}$ и соответствующее порождающее множество U_{i_0, j_0} такое, что $U_{i_0, j_0} \cap W = \{u\}$. Пусть u соединяет вершины x_{i_0} и x_{j_0} . Возьмем некоторый простой путь μ_k (если таковой существует), отличный от u и идущий от x_{i_0} к x_{j_0} . Обозначим через z_k вершину, удовлетворяющую условию:

$$(z_k \in \mu_k) \cdot D_{W \setminus u}(x_{i_0}, z_k) \cdot |\forall x \in \mu_k (D_{W \setminus u}(x_{i_0}, x) \rightarrow l[z_k, x_{j_0}] \leq l[x, x_{j_0}])| \leq l[x, x_{j_0}]) \quad (*)$$

пути $[z_k, x_{j_0}]$, $[x, x_{j_0}] \subset \mu_k$, а $l[\dots]$ означает длину этого пути.

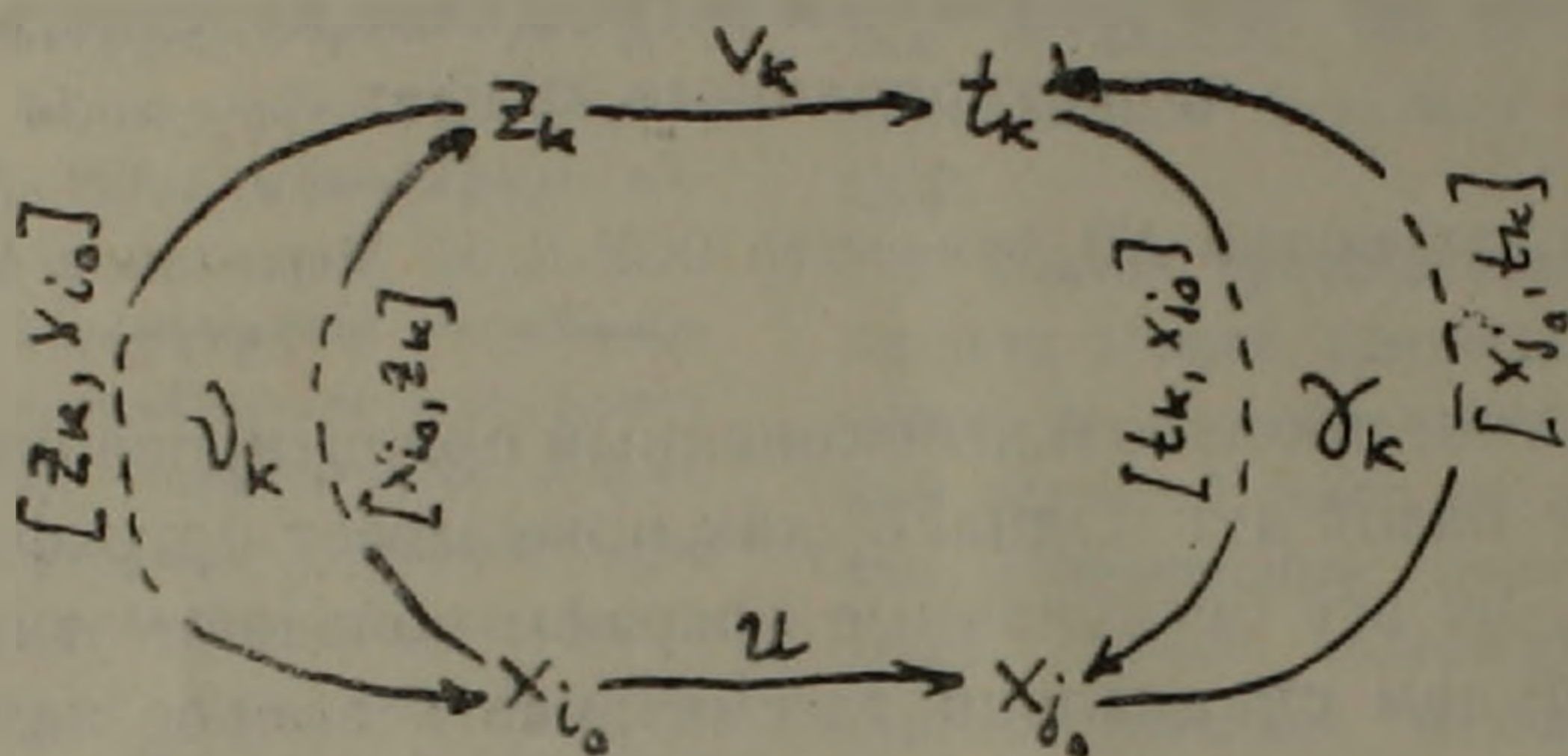


Рис. 2.

Предположим $[x_{i_0}, z_k]$ — путь, состоящий из дуг, принадлежащих множеству $W \setminus u$. Вершина z_k не может совпадать с вершиной x_{j_0} , так как W является базой. Значит, существуют вершина $t_k \in \mu_k$ и дуга $v_k (v_k \in \mu_k) \cdot (v_k \in W)$, соединяющая z_k и t_k . Но тогда z_k и t_k должны быть соединены и с помощью дуг W , и эти пути содержат дугу u , в противном случае часть условия $(*)$ не выполнялась бы, а именно, $\forall x \in \mu_k (D_{W \setminus u}(x_{i_0}, x) \rightarrow l[z_k, x_{j_0}] \leq l[x, x_{j_0}])$ не выполняется при $x = t_k$. Возьмем путь $[z_k, x_{i_0}, x_{j_0}, t_k]$, составленный из дуг W базы. Ясно, что z_k может совпадать с вершиной x_{i_0} , а t_k — с вершиной x_{j_0} . Обозначим через ν_k орцикл $[x_{i_0}, z_k, x_{i_0}] = [x_{i_0}, z_k][z_k, x_{i_0}]$, где $[z_k, x_{i_0}] \subset [z_k, t_k]$, а через γ_k орцикл $[x_{j_0}, t_k, x_{j_0}] = [x_{j_0}, t_k][t_k, x_{j_0}]$, где $[x_{j_0}, t_k] \subset [z_k, t_k]$, а $[t_k, x_{j_0}] \subset \mu_k$ (рис. 2). Возьмем все пути, соединяющие x_{i_0} и x_{j_0} , и со всеми ними проделаем то, что было сделано с μ_k . Составим два подграфа $L_{i_0} = (X_{i_0}, U_{i_0}; P)$ и $L_{j_0} = (X_{j_0}, U_{j_0}; P)$, где $X_{i_0} = \bigcup_k X_{\nu_k}$, X_{ν_k} — множество вершин, принадлежащих орциклу ν_k , аналогично $X_{j_0} = \bigcup_k X_{\gamma_k}$, X_{γ_k} — множество вершин, принадлежащих орциклу γ_k . Подграфы L_{i_0} и L_{j_0} бисвязные, так как они представляют собой соединение орциклов, которые имеют общую вершину соответственно x_{i_0} и x_{j_0} .

$X_{i_0} \cap X_{j_0} = \emptyset$ следует из того, что $X_{i_0} \cap (\bigcup_k X_{[t_k, x_{j_0}]}) = \emptyset$, так как вершины $\bigcup_k X_{[t_k, x_{j_0}]}$ не достижимы из x_{i_0} с помощью дуг $W \setminus u$ и из $X_{i_0} \cap (\bigcup_k X_{[x_{j_0}, t_k]}) = \emptyset$.

Путь, идущий из X_{i_0} в X_{j_0} , имеет длину единица, так как вторая вершина этого пути принадлежит X_{j_0} .

Таким образом, мы получим два подграфа L_{i_0} и L_{j_0} , удовлетворяющие условиям а), б), в), и u является единственной дугой, идущей из X_{i_0} в X_{j_0} , то есть из $U_{i_0 j_0}$, и принадлежащей W .

Заметим, что во время доказательства необходимости мы не использовали прогрессивной и регрессивной конечности орграфа.

Достаточность. Пусть орграф $L = (X, U, P)$ и множество дуг W удовлетворяют условиям теоремы. Покажем, что W является базой дуг.

Второе свойство базы дуг $\forall V \subset W \exists x, y \in X [D_V(x, y) \cdot \bar{D}_V(x, y)]$, т. е. минимальность множества W следует из условия 2), так как для каждой $u \in W$ существует $U_{i_0 j_0}$, откуда взята только дуга u , и поэтому нельзя выбросить ни одной дуги из множества.

Первое свойство базы $\forall x, y \in X [D_u(x, y) \rightarrow D_W(x, y)]$ — сохранение достижимости следует из того, что из каждого собственного подграфа $L_i = (X_i, U_i, P)$ орграфа $L = (X, U, P)$ $X_i \subset X$ выходит дуга, принадлежащая W , если вообще из L_i выходят дуги. Действительно, предположим обратное:

$$\exists x, y \in X [D_u(x, y) \cdot \bar{D}_W(x, y)].$$

Обозначим через $D_W(x)$ множество всех вершин, достижимых из x с помощью дуг W . По предположению $y \notin D_W(x)$. Значит, из собственного подграфа $L_x = (D_W(x), U_x; P)$ вообще выходят дуги, так как $D_u(x, y)$. Но тогда выходит и дуга, принадлежащая W , в силу верхнего утверждения. А это противоречит тому, что $D_W(x)$ содержит все вершины, достижимые из x , с помощью дуг W . Значит, для доказательства сохранения достижимости остается доказать, что из каждого собственного подграфа выходит дуга, принадлежащая W , если вообще из него выходят дуги.

Выбросим из орграфа $L = (X, U; P)$ вершины подграфа $L_i = (X_i, U_i, P)$ и L разложим на бикомпоненты $L_{i,1} L_{i,2}, \dots, L_{i,j}, \dots$ (рис. 3).

Ясно, что если смотреть орграф, где вершинами служат эти бикомпоненты, а дугами только связи между этими бикомпонентами, то в этом орграфе не будет орциклов. Если в этом орграфе вести отношение порядка так, что $L_{i,j_1} < L_{i,j_2}$, если существует путь, идущий из L_{i,j_1} в L_{i,j_2} , то это будет частичное упорядочение и в этом орграфе не будут равные элементы. Предположим $L_{i,j} = (X_{i,j}, U_{i,j}, P)^*$ бикомпонент, имеющий минимальный порядок среди тех, куда входят дуги из L_i . Обозначим эти входящие дуги через $u_1, u_2, \dots$ (1). Его существование вытекает из регрессивной конечности орграфа L . Из подграфа L_i можно попасть в $L_{i,j}$ только через эти дуги, так как $L_{i,j}$ имеет минимальный порядок и не существует равного ему эле-

* Множество дуг $U_{i,j}$ здесь не имеет никакой связи с порождающим множеством.

мента. Аналогично после отбрасывания множества вершин $X_{i,j}$ возникают бикомпоненты $L_{j,1}, L_{j,2}, \dots$ (рис. 4). Пусть $L_{j,k}$ бикомпонент, имеющий максимальный порядок среди тех, откуда выходят дуги, принадлежащие (1). Существование $L_{j,k}$ вытекает из прогрессивной конечности орграфа L . Из $L_{j,k}$ можно попасть в $L_{i,j}$ только через эти дуги, в противном случае из L_i можно было бы попасть в $L_{i,j}$ не только через дуги (1). Итак, мы получили два бисвязных подграфа $L_{j,k}$ и $L_{i,j}$, которые не пересекаются, не существует путь, идущий из $L_{j,k}$ в $L_{i,j}$ и имеющий длину больше единицы, и дуги, идущие из $L_{j,k}$ в $L_{i,j}$, выходят из подграфа L_i . Но из условия 1) теоремы следует, что хотя бы один элемент из этих дуг содержит множество W . Утверждение, вместе с ним и теорема доказаны.

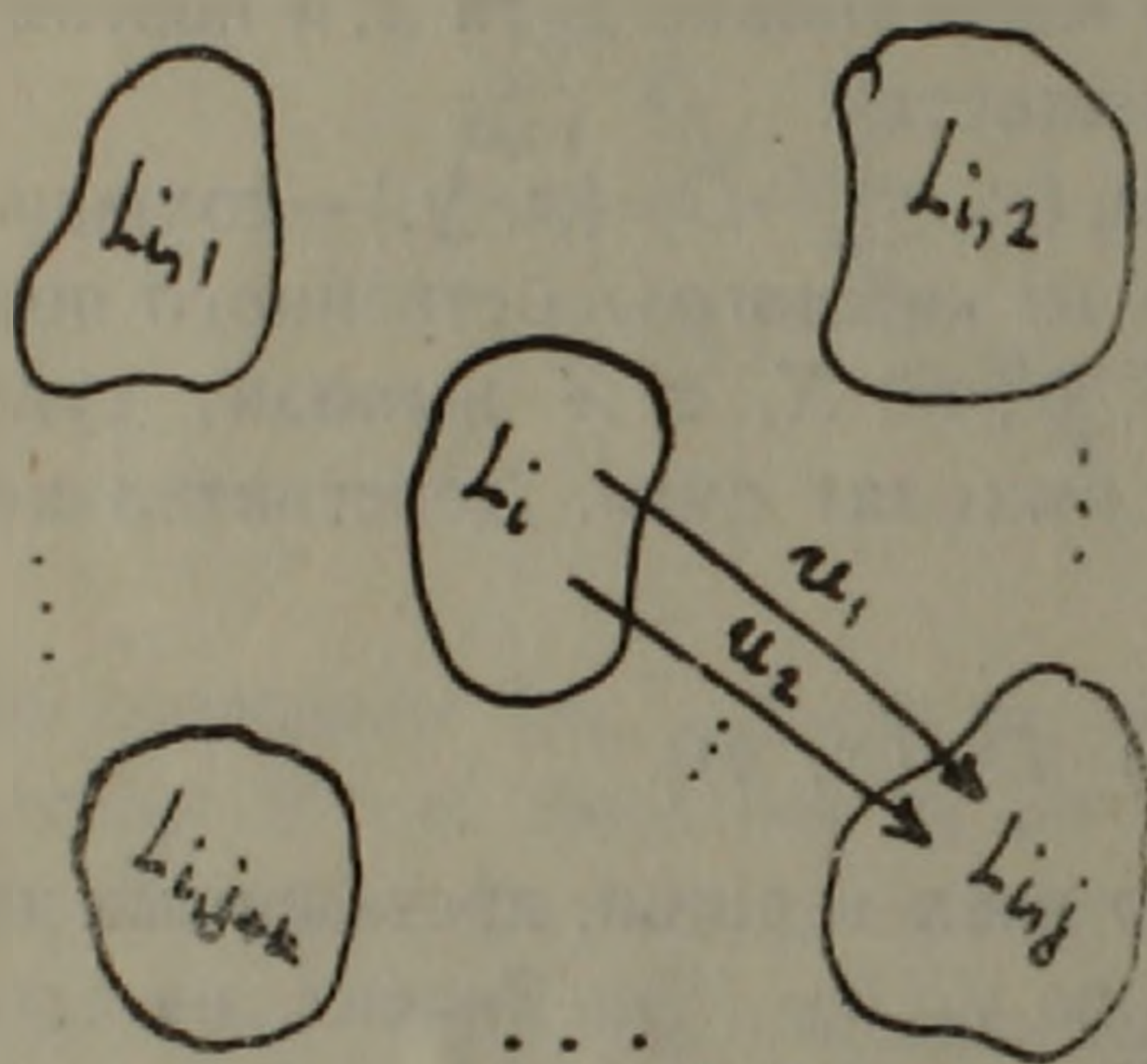


Рис. 3.

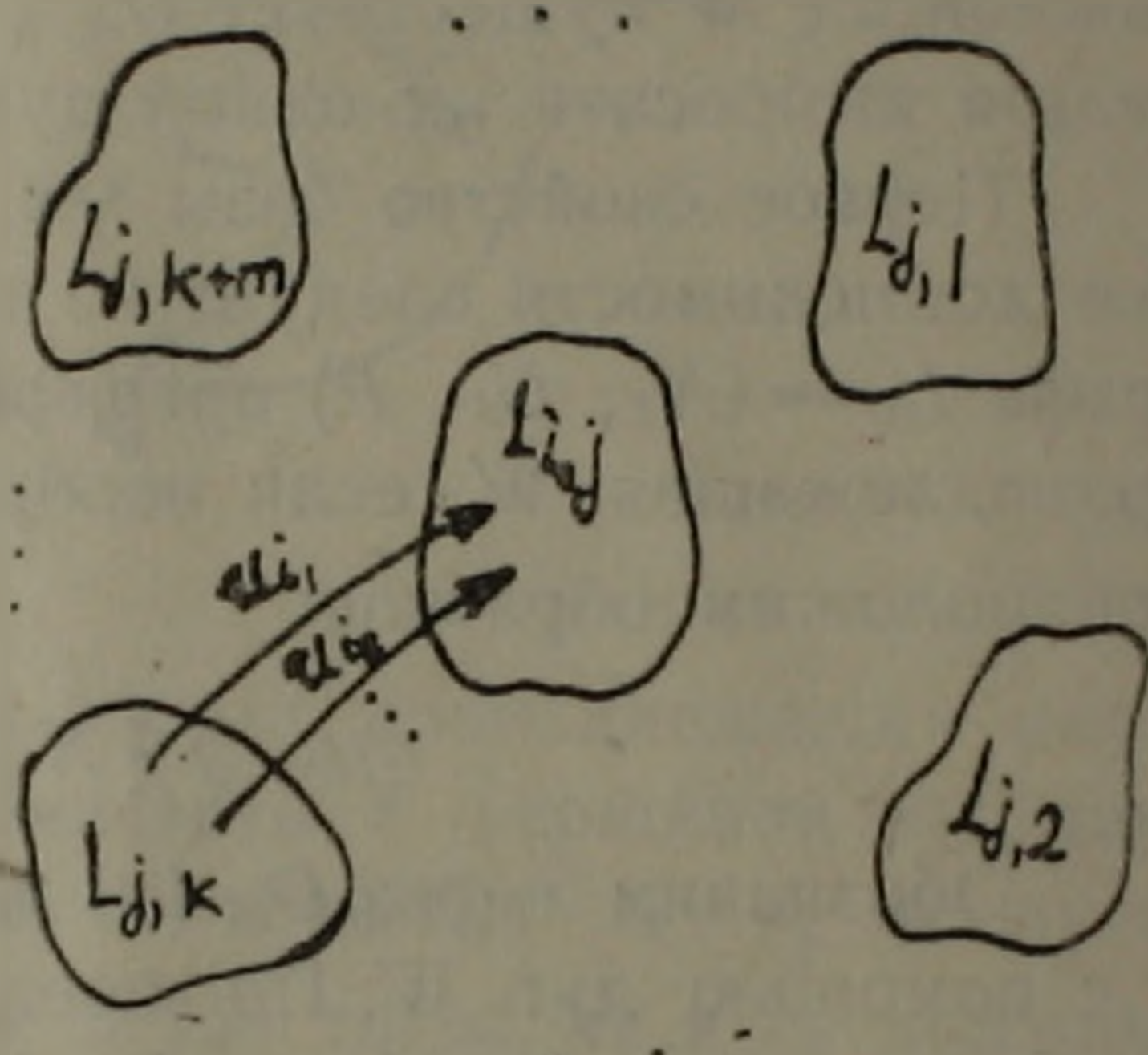


Рис. 4.

Из доказанной теоремы уже видно, как получить все базы дуг конечного орграфа, если даны все порождающие множества дуг $U_{i,j}$. Но пока неизвестен эффективный способ для нахождения этих множеств. Систему дуг $V = \{u_1, u_2, \dots, u_k, \dots\}$ назовем независимой если $\forall u_k \in V \exists x, y \in X \bar{D}_{V \setminus u_k}(x, y)$, и полной, если $\forall x, y [D_V(x, y) \rightarrow \rightarrow D_V(x, y)]$. Базы дуг — независимые и полные системы. Из доказательства теоремы видно, что условие 1) теоремы эквивалентно полноте, а условие 2) — независимости.

После решения задачи о том, какие системы дуг являются базами, возникает более интересная и более общая задача, содержащая первую, а именно: каким условиям должна удовлетворять система дуг $V = \{u_1, u_2, \dots, u_k, \dots\}$, чтобы существовала база, которая содержит систему V . Очевидно, независимость системы V является необходимым условием для поставленной задачи, но, как показывает пример (рис. 5), оно не является достаточным. В этом примере $V = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ максимальная независимая система, но не существует базы, содержащей $V = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$. Это видно из того, что нельзя подключить к ним ни дугу v_1 , ни дугу v_2 , так как множества $V_1 = \{u_1, u_2, u_3, u_4, v_1\}$ или $V_2 = \{u_1, u_2, u_3, u_4, v_2\}$ уже зависимая система. А из дуг v_1 или v_2 одна обязательно должна входить в базу в силу условия 2) теоремы.

Следующее следствие дает ответ выше поставленной задаче.

Следствие 1. Для осуществления базы дуг, содержащей систему дуг $V = \{u_1, u_2, \dots, u_k, \dots\}$, необходимо и достаточно существование таких порождающих множеств $U_{i_1, j_1}, U_{i_2, j_2}, \dots, U_{i_k, j_k}, \dots$, что:

а) $U_{i_k, j_k} \cap V = \{u_k\}$ (независимость системы V);

б) любое порождающее множество $U_{i, j}$ не содержится в $\bigcup_k (U_{i_k, j_k} \setminus u_k)$.

Необходимость. Пусть W — база дуг и содержит систему дуг $V = \{u_1, u_2, \dots, u_k, \dots\}$. Условие а) следствия совпадает с условием 2) теоремы, поэтому выполнено. А условие б) следует из условия 1) теоремы. По условию 1) W должен содержать хотя бы одну дугу из каждого порождающего множества $U_{i, j}$. Пусть $v \in U_{i, j} \cap W$. Очевидно, v не принадлежит $\bigcup_k (U_{i_k, j_k} \setminus u_k)$, поэтому и $U_{i, j} \subseteq \bigcup_k (U_{i_k, j_k} \setminus u_k)$.

Достаточность. Из каждого порождающего множества $U_{i, j}$, пересечение которого с V пусто, можно взять такую дугу, которая не содержится в $\bigcup_k U_{i_k, j_k}$, а из U_{i_k, j_k} возьмем u_k и полученное множество обозначим W .

Ясно, что достижимость в суграфе $L_W = (X, W, P_W)$ та же, что и в орграфе $L = (X, U; P)$. Из теоремы следует, что все базы суграфа L_W содержат систему дуг V . Следствие доказано.

Я. М. Барздинем ⁽³⁾ в несколько ином виде была сформулирована следующая теорема.

Конечный орграф обладает единственной базой дуг тогда и только тогда, когда все порождающие множества состоят из одного элемента.

Однако фактически была доказана лишь необходимость. Достаточность доказана в ⁽⁴⁾. Из доказанной теоремы легко получить достаточность этой теоремы.

Следствие 2. Если все порождающие множества состоят из одного элемента, то орграф L имеет единственную базу.

Так как все порождающие множества содержат только один элемент, то выбор из каждого порождающего множества единственный, поэтому и база единственная.

Обозначим через $\mathcal{M}$ системы всех порождающих множеств, $\mathcal{M} = \{U_{i_1, j_1}, U_{i_2, j_2}, \dots, U_{i_k, j_k}, \dots\}$.

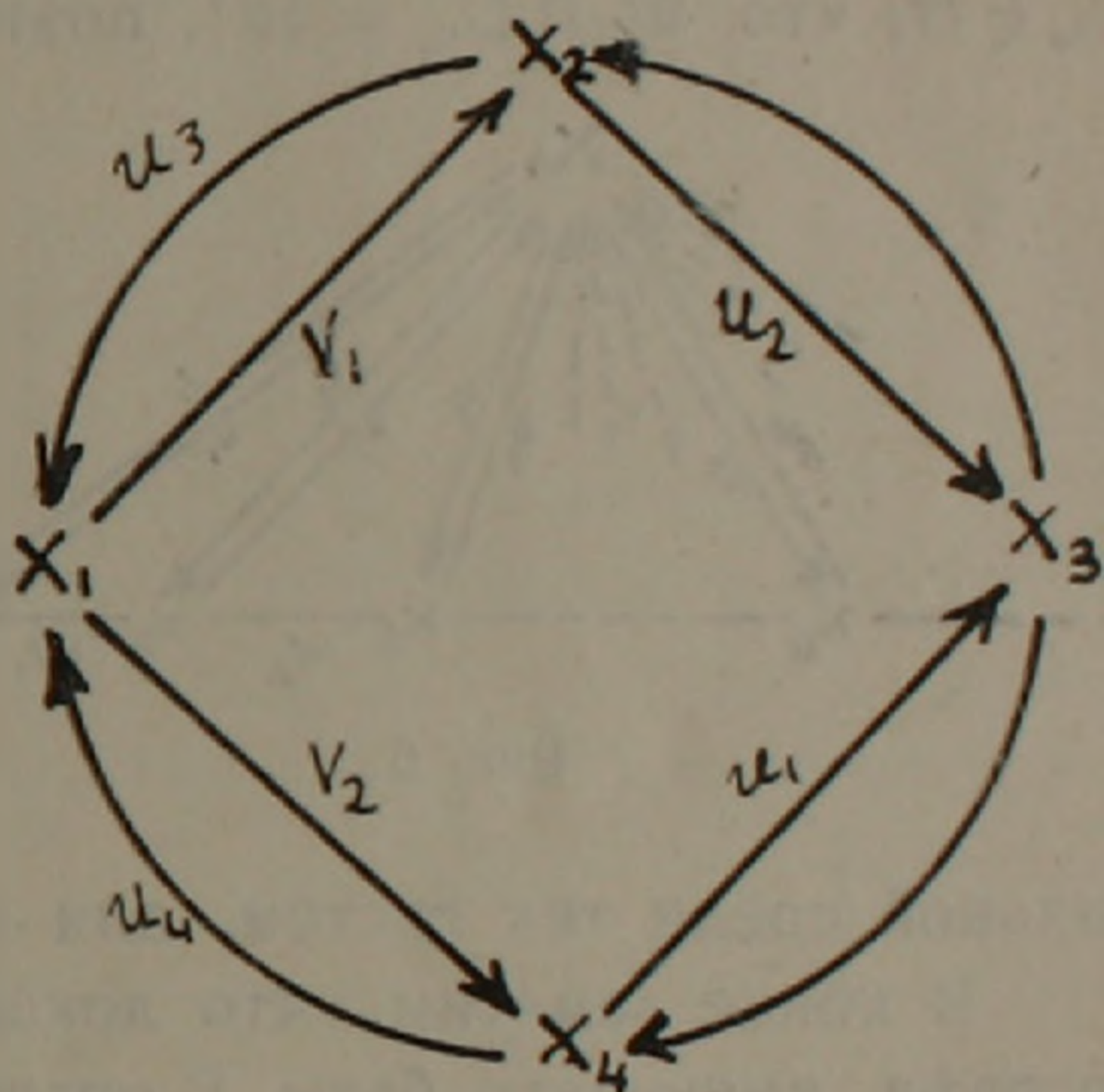


Рис. 5.

Следствие 3. В любой другой системе множеств дуг $H = \{U_\alpha\}$, для которой верна теорема, т. е. система дуг W является базой тогда и только тогда, когда

- 1) $W \cap U_\alpha \neq \emptyset$ для любого $U_\alpha \in H$;
- 2) для любого $u \in W$ существует такое множество $U_{\alpha_0} \in H$, что $U_{\alpha_0} \cap W = \{u\}$, существует такая подсистема $H' = \{U_{\alpha_1}, U_{\alpha_2}, \dots\}$, что $U_{\alpha_1} \supseteq U_{1, j_1}$, $U_{\alpha_2} \supseteq U_{1, j_2} \dots$.

Каждое множество $U_\alpha \in H$ содержит в себе некоторое порождающее множество. В самом деле, если U_α не содержит никакого порождающего множества, то существует база, которая не содержит ни одного элемента из множества U_α (в силу теоремы) вопреки условию 1).

Для любого порождающего множества $U_{1, j}$ существует такое множество $U_\alpha \in H$, которое содержит в себе полностью только это порождающее множество. Действительно, пусть $u \in U_{1, j}$ и W_0 база, которая содержит дугу u . По условию 2) следствия существует такое $U_{\alpha_0} \in H$, что $W_0 \cap U_{\alpha_0} = \{u\}$, поэтому U_{α_0} не может содержать никакое

другое порождающее множество полностью, кроме $U_{1, j}$. А множество $U_{1, j}$ содержится в U_{α_0} , так как каждое U_α хотя бы одно порождающее множество содержит.

Это следствие показывает, что система порождающих множеств $\mathcal{M}$ является минимальной среди тех систем, для которых верна теорема.

В конце заметим, что доказанная теорема неверна для любого орграфа, имеющего базы. В орграфе, изображенном на рис. 6, система дуг $W = \{u_1, v_1, u_2, v_2, \dots\}$ является базой, но если взять систему дуг $W = \{w_1, w_2, \dots\}$, то эта система удовлетворяет условиям 1) и 2) теоремы, но не является базой.

Автор выражает свою признательность А. А. Зыкову за то, что он обратил его внимание на эту задачу, и А. В. Петросяну за постоянный интерес и внимание к работе.

Вычислительный центр
Академии наук Армянской ССР и
Ереванского государственного университета

Ս. Է. ՄԱՐԿՈՍՅԱՆ

Պրոգրեսիվ և ռեգրեսիվ վերջավոր օրինադրված գրաֆի
աղեղների բազաները

Աշխատանքում գտնված է անհրաժեշտ և բավարար պայման պրոգրեսիվ և ռեգրեսիվ վերջավոր օրինադրված գրաֆի աղեղների բազայի գոյության համար: Այստեղից մասնավորապես, ստացված է Բարդիի կողմից ձևակերպված աղեղների բազայի միակության մասին թեորեմի (3) պարզ ապացույց, ինչպես նաև, տվյալ աղեղների բազմությունը պարունակող բազայի գոյության հայտանիշ:

Л И Т Е Р А Т У Р А — Դ Ր ՈՒՄ

¹ А. А. Зыков, Теория конечных графов, 1, изд. Наука, Новосибирск, 1968.

² К. Берж, Теория графов и ее применение, ИЛ, М., 1962. ³ Я. М. Барздинь, Проблема базиса направленных графов. Уч. записки Латв. университета, 28, 33—34, 1959.

⁴ С. Е. Маркосян, „Известия АН АрмССР“, Математика, т. 2, № 6 (1967).