ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
XLV 1967 3

МАТЕМАТИКА

Н. Г. Галстян

Об оснащении изотропных гиперповерхностей

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР А. А. Талаляном 24/IV 1967)

1. Оснащение.

В римановом пространстве V_n рассмотрим изотропную гиперповерхность X_{n-1}, задаваемую уравнениями

$$y^\alpha = y^\alpha(x^1, \cdots, x^{n-1})^*$$

и с метрическим тензором $g_{ij} = a_{\alpha\beta}\, y_i^\alpha\, y_j^\beta$, с матрицей ранга $n-2$. Существует вектор μ^i, такой, что $\mu^i g_{ij} = 0$, который определяет в V_n изотропный вектор ξ^α — нормальный к этой гиперповерхности

$$\xi^\alpha = \mu^i\, y_i^\alpha. \tag{1.1}$$

Вследствие вырожденности тензора g_{ij}, нельзя обычным путем построить контравариантные компоненты этого тензора. Из соображений, изложенных в работах [1,2], целесообразно ввести следующее определение для g_{ij}:

$$g_{ih}\, g^{hj} = \delta_i^j - \lambda_i\, \mu^j, \tag{1.2}$$

где $\lambda_i = a_{\alpha\beta}\, M^\alpha y_i^\beta$, а M^α — изотропный вектор оснащения, не лежащий на X_{n-1} и удовлетворяющий соотношению $a_{\alpha\beta}\, \xi^\alpha M^\beta = 1$.

Будем говорить, что на некоторой кривой, принадлежащей оснащенной X_{n-1}, задана связность, которая индуцирована связностью во внешнем V_n, если абсолютный дифференциал вектора, принадлежащего X_{n-1} и переносящегося параллельно в индуцированной связности, выражается так

$$\delta v^\alpha = p M^\alpha, \tag{1.3}$$

где δ — символ абсолютного дифференцирования в связности объемлющего пространства. Таким образом индуцированная связность будет аффинной во всем X_{n-1} ([3], стр. 145). Так как условие (1.3) должно иметь место при любых v^α, то

$$\delta y_i^\alpha = p_i M^\alpha,$$

* Здесь и в дальнейшем предполагается, что $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \mu, \nu, \sigma = 1, 2, \cdots, n$; $i, j, k, l, m, h = 1, 2, 3, \cdots, (n-1)$;

Учитывая, что $p_l = b_{lk} dx^k$, $b_{[lk]}=0$, приходим к соотношениям

$$\nabla_k y_l^\alpha = b_{lk} M^\alpha \tag{1.4}$$

(∇_k — символ ковариантной производной в V_n), которые могут быть представлены в виде

$$\partial_k y_l^\alpha - \overline{\Gamma}^l_{ik} y_l^\alpha + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} y_l^\beta y_k^\gamma = b_{lk} M^\alpha, \tag{1.5}$$

$\overline{\Gamma}^l_{ik}$ и $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ — коэффициенты связностей X_{n-1} и V_n соответственно.

Имеем

$$\overset{x}{\nabla}_k y_l^\alpha \equiv \partial_k y_l^\alpha - \overline{\Gamma}^l_{ik} y_l^\alpha = b_{lk} M^\alpha - \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} y_l^\beta y_k^\gamma, \tag{1.6}$$

($\overset{x}{\nabla}_k$ — символ ковариантной производной в X_{n-1}).

Дифференцируя ковариантно выражение $a_{\alpha\beta} \xi^\alpha y_l^\beta = 0$ относительно связности X_{n-1}, получим

$$b_{lk} = - a_{\alpha\beta} y_l^\beta \xi^\alpha_{,k} - \Gamma_{\beta,\alpha\gamma} \xi^\alpha y_l^\beta y_k^\gamma, \tag{1.7}$$

откуда

$$\mu^l b_{lk} = -a_{\alpha\beta} \xi^\beta \xi^\alpha_{,k} - \Gamma_{\beta,\alpha\gamma} \xi^\alpha \xi^\beta y_k^\gamma = \overset{x}{\nabla}_k (a_{\alpha\beta} \xi^\alpha \xi^\beta) \equiv 0. \tag{1.8}$$

В силу соотношений (1.1), выражение (1.7) приводится к виду

$$b_{lk} = - g_{il} \overset{x}{\nabla}_k \mu^l \equiv - g_{il} \mu^l_{,k}. \tag{1.9}$$

Применяя такую же операцию к соотношению $g_{ij} = a_{\alpha\beta} y_i^\alpha y_j^\beta$, получим

$$g_{ij,k} = \overset{x}{\nabla}_k g_{ij} = \lambda_i b_{jk} + \lambda_j b_{ik}. \tag{1.10}$$

Из (1.8) следует, что $\mu^k \overset{x}{\nabla}_k g_{ij} = 0$.

Ковариантное дифференцирование уравнений (1.2) дает

$$g^{ij}_{,k} = \overset{x}{\nabla}_k g^{ij} = - (\mu^i g^{lj} + \mu^j g^{li}) \overset{x}{\nabla}_k \lambda_l. \tag{1.11}$$

Из соотношений

$$g_{ij,k} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} - g_{lj} \overline{\Gamma}^l_{ik} - g_{il} \overline{\Gamma}^l_{jk} = \lambda_i b_{jk} + \lambda_j b_{ik}$$

следует

$$g_{lk} \overline{\Gamma}^k_{ij} = T_{l,ij} - \lambda_l b_{ij}, \tag{1.12}$$

где $T_{l,ij} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial g_{il}}{\partial x^j} + \dfrac{\partial g_{jl}}{\partial x^i} - \dfrac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} \right)$.

Подставляя $b_{ij} = \mu^l T_{l,ij}$ и учитывая (1.2), придем к уравнениям

$$g_{lk} \overline{\Gamma}^k_{ij} = g_{lk} g^{kh} T_{h,ij}, \tag{1.13}$$

откуда

$$\overline{\Gamma}^k_{ij} = g^{kh} T_{h,ij} + \mu^k p_{ij}. \tag{1.14}$$

Из уравнений (1.5) определяются p_{ij}

$$p_{ij} = a_{\alpha\beta} M^\beta y_i^\rho \nabla_\rho y_j^\alpha, \tag{1.15}$$

И окончательно

$$\overline{\Gamma}{}^{k}_{ij} = g^{kh}\, T_{h,\,ij} + a_{\alpha\beta}\, M^{\beta}\, y^{\rho}_{i}\, \nabla_{\rho}\, y^{\alpha}_{j}\, \mu^{k}. \tag{1.16}$$

Тензор кривизны, вычисленный для $\overline{\Gamma}{}^{l}_{ij}$, вида (1.6), имеет следующий вид ([4], стр. 141):

$$R^{l}{}_{ijk} = K^{l}_{\cdot ijk} - 2\overset{x}{\nabla}_{[k}\, (\mu^{l}\, p_{j]\, i}), \tag{1.17}$$

где $K^{l}_{\cdot ijk}$ составлены из $T^{l}_{ij} = g^{lh}\, T_{h,\,ij}$.

2. Уравнения Гаусса-Кодацци.

Для завершения теории изотропных гиперповерхностей является существенным получить уравнения, аналогичные уравнениям Гаусса-Кодацци.

Для ковариантной производной нормального вектора получается

$$\xi^{\alpha}_{,k} = \overset{x}{\nabla}_{k}\, \xi^{\alpha} = -\overline{\Gamma}{}^{\alpha}_{\mu\nu}\, \xi^{\mu}\, y^{\nu}_{k} - g^{lh}\, b_{lk}\, y^{\alpha}_{h} + \xi^{\alpha}\, \mu^{l}\, \overset{x}{\nabla}_{k}\, \lambda_{l}\,, \tag{2.1}$$

а для $\overset{x}{\nabla}_{k} M^{\alpha}$ имеем ([4])

$$\overset{x}{\nabla}_{k}\, M^{\alpha} = -\,\Gamma^{\alpha}_{\rho\nu}\, M^{\rho}\, y^{\nu}_{k} + M^{\alpha}\mu^{j}\overset{x}{\nabla}_{k}\,\lambda_{j} + g^{lm}\, y^{\alpha}_{m}\, \overset{x}{\nabla}_{k}\, \lambda_{l}\,. \tag{2.2}$$

Ковариантное дифференцирование (1.6) и (1.9) приводит соответственно к уравнениям

$$\left.\begin{aligned} 2b_{i\,[j,\,k]} &= 2\,\lambda_{h}\, b_{i\,[j}\, \mu^{h}_{,\,k]} - g_{ih}\, \mu^{l}\, R^{h}{}_{ljk} \\ 2y^{\alpha}_{,i\,[jk]} = 2\overset{x}{\nabla}_{[k}\nabla_{j]}\, y^{\alpha}_{i} &= 2g^{lm} y^{\alpha}_{m}\, b_{i\,[j}\, \overset{x}{\nabla}_{k]}\, \lambda_{l} - 2M^{\alpha} g_{ih}\, \mu^{l}\, R^{h}_{l;k} - R^{\alpha}_{\mu\sigma\nu}\, y^{\mu}_{i}\, y^{\sigma}_{k}\, y^{\nu}_{j} \end{aligned}\right| \tag{2.3}$$

Свертыванием последнего уравнения с $a_{\alpha\beta}\,\xi^{\beta}$ получим

$$g_{ih}\, \mu^{l}\, R^{h}{}_{ljk} = -\, R_{\beta\mu\sigma\nu}\, \xi^{\beta}\, y^{\mu}_{i}\, y^{\sigma}_{k}\, y^{\nu}_{j}. \tag{2.4}$$

Уравнения Гуасса—Кодацци для изотропных гиперповерхностей можно записать в таком виде:

$$\left.\begin{aligned} 2b_{i\,[j,\,k]} &= 2\lambda_{h}\, b_{i\,[j}\, \mu^{h}_{k]} + R_{\beta\mu\sigma\nu}\, \xi^{\beta}\, y^{\mu}_{i}\, y^{\sigma}_{k}\, y^{\nu}_{j} \\ 2y^{\alpha}_{,i[jk]} &= 2g^{lm}\, y^{\alpha}_{m}\, b_{i\,[j}\, \overset{x}{\nabla}_{k]}\, \lambda_{l} + (M^{\alpha}\, \xi^{\beta}\, R_{\beta\mu\sigma\nu} - R^{\alpha}_{\mu\sigma\nu})\, y^{\mu}_{i}\, y^{\sigma}_{k}\, y^{\nu}_{j} \end{aligned}\right| \tag{2.5}$$

Возможно, что существует другой способ изучения изотропных гиперповерхностей. Предлагаемый в этой статье метод имеет то преимущество, что позволяет выразить основные объекты, определяющие гиперповерхность, через метрику объемлющего пространства и уравнения, определяющие гиперповерхность.

В заключение автор выражает искреннюю благодарность А. З. Петрову за постановку задачи и ценные советы.

Казанский государственный университет

Ն. Գ. ԳԱԼՍՏՅԱՆ

Իզոտրոպ մակերևույթների հազեցման մասին

Դիտարկվում է ռիմանյան n- չափանի տարածության իզոտրոպ հիպերմակերևույթները։ Այդպիսի մակերևույթի նորմալը գտնվում է մակերևույթի վրա։ Ուստի անհնարին է սովորական իմաստով կատարել իզոտրոպ մակերևույթի հագեցումը՝ որոշել աֆինական կապակցության գործակիցները։ Այդ նպատակով վերցրած է իզոտրոպ վեկտոր, որը չի գտնվում այդ մակերևույթի վրա և այդ վեկտորի օգնությամբ կատարվում է հագեցումը։ Ստացված են աֆինական կապակցության գործակիցները, երկրորդ հիմնական տենզորը, կորության տենզորը, Գաուս Կոդացու հավասարումները։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Жан-Бетран, М. Каммер,* Tensur de courbure d'une hypersurface Isotrope, Comptes Rendus de L'Acad. Sc. t. 264 ser. A, № 2, 86—89 (1967). [2] *Н. Г. Галстян,* Теория относительности и гравитация, Тематический сборник, вып. 4, изд. Казанского университета, 1967. [3] *А. П. Норден,* Пространства аффинной связности, Изд. технико-теор. лит. М., 1950. [4] *J. A. Schouten,* Ricci-Calculus, London, Now-Jork, 1954.