

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

В. А. Джрбашян

О законах сохранения в электромагнитной теории

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Г. С. Саакяном 2/VII 1965)

В последнее время появились работы (¹⁻³), в которых показывается, что в электромагнитной теории, наряду с законами сохранения энергии, импульса, должны существовать и другие законы сохранения, совместимые с уравнениями Максвелла.

Фельдман (⁴) обобщил результат работы (³) на случай наличия гравитационного поля. Следующий шаг в рассматриваемой области был сделан Ферли (⁵), который показал, что ряд законов сохранения для свободного поля является следствием инвариантности Лагранжиана относительно трансляции. Используя полную группу Лоренца, он же нашел новые законы сохранения.

В настоящей статье для взаимодействующего электромагнитного поля выводятся обусловленные полной неоднородной группой Лоренца все законы сохранения, которые относятся к тензору энергии-импульса.

Оказывается, что эти законы можно выразить с помощью операторов импульса $P_a(u)$ и обобщенного момента $M_{\alpha\beta}\left(z, \frac{\partial}{\partial u}\right)$.

На примере одного класса законов сохранения, с помощью аппарата вторичного квантования, исследуется их физический смысл. Для свободного поля получается, что эти законы эквивалентны постоянству во времени чисел заполнения каждого сорта фотонов.

Рассмотрим выражение для обобщенного тензора энергии-импульса

$$T_{\mu\nu}\left(\frac{\partial}{\partial x}, u; \frac{\partial}{\partial y}, v\right) = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x^\mu} A_\sigma(u) \frac{\partial}{\partial y^\nu} A^\sigma(v) + \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial x^\nu} A_\sigma(u) \frac{\partial}{\partial y^\mu} A^\sigma(v) - g_{\mu\nu} g^{\rho\sigma} \frac{\partial}{\partial x^\rho} A_\sigma(u) \frac{\partial}{\partial y^\sigma} A^\sigma(v)\right]. \quad (1)$$

Введем обозначение

$$T_{\mu\nu}\left(\frac{\partial}{\partial x}, \Lambda x + a; \frac{\partial}{\partial y}, \Sigma y + b\right) = T_{\mu\nu}(\Lambda x + a, \Sigma y + b), \quad (2)$$

из которого следует, что $T_{\mu\nu}(x, x)$ есть обычный тензор энергии-импульса $T_{\mu\nu}(x)$. Если под (Λ, a) , (Σ, b) понимать десятипараметрические преобразования, образующие полную неоднородную группу Лоренца, то воспользовавшись уравнениями

$$g^{\alpha\beta} \frac{\partial^2}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} A_\sigma(x) = -j_\sigma(x), \quad (3)$$

вместе с дополнительным условием $g^{\alpha\beta} \frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\beta} = 0$, легко показать, что

$$\frac{\partial}{\partial x^\nu} T_\mu^\nu(\Lambda x + a, \Sigma y + b) = -\frac{1}{2} j_\sigma(\Lambda x + a) \frac{\partial}{\partial y^\mu} A^\sigma(\Sigma y + b), \quad (4)$$

откуда, благодаря симметричности T_μ^ν при перестановке аргументов, следует

$$\frac{\partial}{\partial y^\nu} T_\mu^\nu(\Lambda x + a, \Sigma y + b) = -\frac{1}{2} j_\sigma(\Sigma y + b) \frac{\partial}{\partial x^\mu} A^\sigma(\Lambda x + a). \quad (5)$$

Отметим, что из-за симметричности $T^{\mu\nu}$ относительно μ, ν из выражения (4) следуют также остальные дивергенции при одном фиксированном аргументе.

Теперь напомним явный вид неоднородного преобразования Лоренца

$$x'^\rho = (\Lambda x + a)^\rho = x^\rho + \frac{1}{2} \varepsilon_{\alpha\beta} (g^{\rho\alpha} x^\beta - g^{\rho\beta} x^\alpha) + a^\rho, \quad (6)$$

где величины $\varepsilon_{\alpha\beta}$ антисимметричны и настолько малы, что их произведениями можно пренебречь.

Если последовательно дифференцировать соотношения (4), (5) по параметрам $\varepsilon^{\alpha\beta}$, a^α , затем, учитывая (6), в окончательном выражении подставить $\varepsilon_{\alpha_1\alpha_2} = \varepsilon_{\alpha_2\alpha_3} = \dots = a_{\alpha_1} = a_{\alpha_2} = \dots = 0$, то в левых частях (4), (5) под дивергенцией получим новые тензоры.

Выполняя аналогичную процедуру также относительно второго аргумента, затем складывая полученные таким образом из (4), (5) соотношения, придем к законам сохранения:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left[O_{\alpha_1} \left(z, \frac{\partial}{\partial u} \right) O_{\alpha_2} \left(z, \frac{\partial}{\partial u} \right) \dots O_{\alpha_m} \left(z, \frac{\partial}{\partial u} \right) \times \right. \\ & \quad \times O_{\beta_1} \left(w, \frac{\partial}{\partial v} \right) O_{\beta_2} \left(w, \frac{\partial}{\partial v} \right) \dots \times \\ & \quad \left. \times O_{\beta_n} \left(w, \frac{\partial}{\partial v} \right) T_\mu^\nu \left(\frac{\partial}{\partial x}, u; \frac{\partial}{\partial y}, v \right) \right]_{z=u=w=v=y=x} = \\ & = -\frac{1}{2} \left\{ O_{\alpha_1} \left(z, \frac{\partial}{\partial u} \right) O_{\alpha_2} \left(z, \frac{\partial}{\partial u} \right) \dots O_{\alpha_m} \left(z, \frac{\partial}{\partial u} \right) O_{\beta_1} \left(w, \frac{\partial}{\partial v} \right) \times \right. \end{aligned} \quad (7)$$

$$\times O_{\beta_2} \left(w, \frac{\partial}{\partial v} \right) \cdots O_{\beta_n} \left(w, \frac{\partial}{\partial v} \right) \left[j_\sigma(u) \frac{\partial}{\partial y^\sigma} A^\sigma(v) + \right. \\ \left. + j_\sigma(v) \frac{\partial}{\partial x^\sigma} A^\sigma(u) \right] \Big|_{z=u=w=v=y=x} \quad (7)$$

Здесь каждый из операторов $O_\alpha \left(z, \frac{\partial}{\partial u} \right)$ может быть оператор импульса $P_\alpha(u) = -i \frac{\partial}{\partial u^\alpha}$, или обобщенный оператор момента $M_{\alpha\beta} \left(z, \frac{\partial}{\partial u} \right) = -i \left(g_{\alpha\rho} z^\rho \frac{\partial}{\partial u^\beta} - g_{\beta\rho} z^\rho \frac{\partial}{\partial u^\alpha} \right)$. Обобщенный тензор $T^{\mu\nu} \left(\frac{\partial}{\partial x}, u; \frac{\partial}{\partial y}, v \right)$ определяется выражением (1). Заметим, что тензор $2i \left[M^{\alpha\beta}(u) T^{\mu\nu} \left(\frac{\partial}{\partial x}, u; \frac{\partial}{\partial x}, x \right) \right]_{u=x}$ совпадает с полученным в (5) тензором $T^{\alpha\beta\mu\nu}$.

Наконец, рассмотрим тензор $V_{\mu\nu}(x, y)$, обсуждаемый в работах (1, 2)

$$V_{\mu\nu}(x, y) = F_{\mu\sigma}(x) F^{\sigma}_{\nu}(y) - F^{\sigma}_{\mu}(x) F_{\sigma\nu}(y), \quad (8)$$

где $F^{\star}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} F^{\alpha\beta}$ есть дуальный тензор $F_{\mu\nu}$. Используя уравнения Максвелла, получим

$$\frac{\partial}{\partial x^\nu} V^{\mu\nu}(x, y) = -j_\sigma(x) F^{\sigma\mu}(y). \quad (9)$$

Выражения для остальных дивергенций получатся из (9), если учесть симметричность $V^{\mu\nu}(x, y)$ относительно μ, ν и антисимметричность при перестановке x, y . Исходя из (9), придавая x, y приращения a и b и используя примененный выше метод дифференцирования по этим параметрам, получим

$$\frac{\partial}{\partial x^\nu} \left[P_{\alpha_1}(x) P_{\alpha_2}(x) \cdots P_{\alpha_m}(x) P_{\beta_1}(y) P_{\beta_2}(y) \cdots P_{\beta_n}(y) V^{\mu\nu}(x, y) \right]_{y=x} = \\ = \left\{ P_{\alpha_1}(x) P_{\alpha_2}(x) \cdots P_{\alpha_m}(x) P_{\beta_1}(y) P_{\beta_2}(y) \cdots P_{\beta_n}(y) \times \right. \\ \left. \times \left[j_\sigma(y) F^{\sigma\mu}(x) - j_\sigma(x) F^{\sigma\mu}(y) \right] \right\}_{y=x} \quad (10)$$

В случае отсутствия взаимодействия $j_\sigma = 0$ и (10) совпадает с результатом работы (2). Отметим, что законы сохранения, получаемые из рассмотрения моментов $T^{\mu\nu}$ и $V^{\mu\nu}$, ничего нового не дают, поскольку, с учетом симметрии относительно μ, ν , следуют из (7) и (10).

В заключение исследуем физический смысл законов сохранения с помощью аппарата вторичного квантования ⁽⁶⁾ на примере соотношения Моргана для свободного поля¹.

Легко убедиться, что сохраняющаяся величина

$$-i \int \left[P_{a_1}(x) P_{a_1}(x) \cdots P_{a_m}(x) T_{\mu}{}^4(x, y) \right]_{y=x} dr$$

равна

$$\sum_{k, \lambda} k_{a_1} k_{a_2} \cdots k_{a_{m+1}} \frac{1}{2} \left[c_{k\lambda} c_{k\lambda}^+ + (-1)^m c_{k\lambda}^+ c_{k\lambda} \right].$$

Откуда, при четном $m = 2l$, следует

$$\sum_{k, \lambda=1,2} k_{a_1} k_{a_2} \cdots k_{a_{2l+1}} N_{k\lambda} = \text{const.} \quad (11)$$

Из (11) следует, что для свободного поля число фотонов $N_k = N_{k_1} + N_{k_2}$ с четырехмерным волновым вектором k постоянно.

Действительно, пусть в начальном состоянии имелось n сортов фотонов (n — число отличных от нуля N_k). Для простоты рассмотрим первые n уравнений (11), относящихся только к четвертой компоненте: $a_1 = a_2 = \cdots a_{2n-1} = 4$, $k_4 = ik_0$. Энергию фотона k_0 мы обозначим через k , а индексы при k ниже будут означать, что рассматриваются энергии разных фотонов.

$$k_1 N_{k_1} + k_2 N_{k_2} + \cdots + k_n N_{k_n} = \text{const}^{(1)}.$$

$$k_1^3 N_{k_1} + k_2^3 N_{k_2} + \cdots + k_n^3 N_{k_n} = \text{const}^{(2)}. \quad (12)$$

$$\cdots \cdots \cdots$$

$$k_1^{2n-1} N_{k_1} + k_2^{2n-1} N_{k_2} + \cdots + k_n^{2n-1} N_{k_n} = \text{const}^{(n)}.$$

Определитель D системы (12) пропорционален определителю Вандермонда

$$D = k_1 k_2 \cdots k_n \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ k_1^2 & k_2^2 & \cdots & k_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ k_1^{2n-2} & k_2^{2n-2} & \cdots & k_n^{2n-2} \end{vmatrix} = k_1 k_2 \cdots k_n \prod_{n>l>m>1} (k_l^2 - k_m^2). \quad (13)$$

Так как для отличных от нуля и друг друга k согласно (13) $D \neq 0$, то система (12) имеет определенное решение. N_k однозначно выражаются через сохраняющиеся величины.

Предположение существования решения N_k влечет за собой совместимость остальных уравнений с рассмотренными в (12).

В заключение автор благодарит А. Ц. Амасуни, И. И. Гольдмана и Р. В. Тевикяна за интерес к работе, обсуждение и полезные советы.

Физический институт ГКАЭ

¹ Частный случай соотношений (7).

ԷԼԵԿՏՐԱԴԻՆԱՄԻԿԱԿԱՆ ՔԵՄԻՍԻՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Փոխադրող էլեկտրամագնիսական դաշտի համար դուրս են բերված Լորենցի ոչ հա-
մաձև խմբով պայմանավորված բոլոր պահպանման օրենքները, որոնք վերաբերում են
էներգիա-իմպուլսի տենզորին:

Պարզվում է, որ այդ օրենքները կարելի է արտահայտել իմպուլսի $P(u)$ և ընդհան-
րացրած մոմենտի $M_{\alpha\lambda}(z, \frac{\partial}{\partial u})$ օպերատորների միջոցով:

Պահպանման օրենքների մեկ դասի օրինակով, օգտագործելով երկրորդային քվան-
տացման ապարատը, հետազոտվում է նրանց ֆիզիկական իմաստը: Ազատ դաշտի համար
ստացվում է, որ այդ օրենքները համարժեք են ֆոտոնների յուրաքանչյուր տեսակի լրաց-
ման թվերի հաստատունությանը ժամանակի ընթացքում:

ЛИТЕРАТУРА — ԴՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ Д. М. Липкин, Journal of Math. Phys., 5, 696 (1964). ² Т. А. Морган, Journal
of Math. Phys., 5, 1659 (1964). ³ Т. В. Б. Куббл, Imperial College London Preprint,
I. C. T. P. 64/65. ⁴ К. С. Фельдман, Nuovo Cimento, 37, 104, (1965). ⁵ Д. Б. Ферли,
Nuovo Cimento, 37, 897 (1965). ⁶ А. И. Ахиезер. В. Б. Берестецкий, Квантовая элек-
тродинамика, ГИФМЛ, 1959.