ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
XLI 1965 4

МЕХАНИКА

Г. Е. Багдасарян и В. Ц. Гнуни

Колебания цилиндрической оболочки, заполненной жидкостью переменной глубины

(Представлено академиком АН Армянской ССР С. А. Амбарцумяном 26/IV 1965)

Рассмотрим колебания круговой цилиндрической оболочки, заполненной несжимаемой жидкостью переменной глубины с надувом q.

1. Координатную (срединную) поверхность оболочки представим координатами α — по образующей и β — по дуге поперечного сечения.

По отношению тонкой оболочки принимаем гипотезу о недеформируемых нормалях ([1]).

Принимаем также, что волновое движение на свободной поверхности жидкости слабо влияет на колебание оболочки ([2]).

Система уравнений колебания оболочки и потенциального движения жидкости имеет вид

$$\frac{1}{Eh}\Delta^2\Phi + \frac{1}{R}\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha^2} = 0, \tag{1.1}$$

$$\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}\Delta^2 w - \frac{1}{R}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\alpha^2} - \frac{Rq}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha^2} - Rq\frac{\partial^2 w}{\partial\beta^2} + \rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} =$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{при} \quad b(t) < \alpha < l \\ \rho_0 \left.\dfrac{\partial\psi}{\partial t}\right|_{r=R} + \rho_0 g R\,[b(t)-\alpha]\,\dfrac{\partial^2 w}{\partial\beta^2} & \text{при} \quad 0 < \alpha < b(t) \end{cases} \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial\alpha^2} = 0. \tag{1.3}$$

Здесь w — прогиб, Φ — функция напряжения, R — радиус, h — толщина, E — модуль упругости, ν — коэффициент Пуассона, ρ — плотность материала оболочки, ψ — потенциальная функция движения жидкости, $b(t)$ — глубина, ρ_0 — плотность жидкости.

Представим решение системы уравнений (1.1)—(1.3) в виде

$$w = \cos n\varphi \sum_{s=0}^{N} w_s(t) \sin \frac{\lambda_s \alpha}{R},$$

$$\Phi = \cos n\varphi \sum_{s=0}^{N} \Phi_s(t) \sin \frac{\lambda_s \alpha}{R},$$

$$\psi = \cos n\varphi \left\{ \sum_{s=0}^{N} B_s(t) I_n\left(\frac{\lambda_s r}{R}\right) \sin \frac{\lambda_s \alpha}{R} + \right. \tag{1.4}$$

$$\left. + \sum_{j=1} \left[C_j(t) \operatorname{sh} \frac{\alpha_{nj}\alpha}{R} + D_j(t) \operatorname{ch} \frac{\alpha_{nj}\alpha}{R} \right] J_n\left(\frac{\alpha_{nj} r}{R}\right) \right\},$$

где $\lambda_s = (m+s)\pi R/l$, m — число волн изогнутой поверхности вдоль образующей, n — число волн в окружном направлении, I_n, J_n — модифицированные и немодифицированные функции Бесселя первого рода.

Рассматривая решение (1.4), замечаем, что оно тождественно удовлетворяет условиям шарнирного опирания торцов оболочки и уравнению (1.3); что же касается уравнений (1.1), (1.2) и краевых условий на границе области, занятой жидкостью

$$\left.\frac{\partial \psi}{\partial r}\right|_{r=R} = \frac{\partial w}{\partial t}, \qquad \left.\frac{\partial \psi}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0} = 0, \qquad \left.\frac{\partial \psi}{\partial t}\right|_{\alpha=b(t)} = 0, \tag{1.5}$$

то их удовлетворим при определении $w_s(t)$, $\Phi_s(t)$, $B_s(t)$, $C_j(t)$, $D_j(t)$ и α_{nj}.

Подставляя (1.4) в (1.1) и (1.5), получим

$$\Phi_s(t) = EhR \frac{\lambda_s^2}{(n^2+\lambda_s^2)^2} w_s(t),$$

$$B_s(t) = \frac{2R}{\lambda_s [I_{n-1}(\lambda_s) + I_{n+1}(\lambda_s)]} \frac{dw_s(t)}{dt},$$

$$C_j(t) = \frac{2R}{\alpha_{nj}\left(1 - \frac{n^2}{\alpha_{nj}^2}\right) J_n(\alpha_{nj})} \sum_{s=0}^{N} \frac{\lambda_s}{\alpha_{nj}^2 + \lambda_s^2} \frac{dw_s(t)}{dt}, \tag{1.6}$$

$$D_j(t) = \frac{2R}{\alpha_{nj}\left(1 - \frac{n^2}{\alpha_{nj}^2}\right) J_n(\alpha_{nj})} \sum_{s=0}^{N} \int_0^t \frac{\alpha_{nj} \sin \frac{\lambda_s b(t)}{R} - \lambda_s \operatorname{sh} \frac{\alpha_{nj} b(t)}{R}}{(\alpha_{nj}^2 + \lambda_s^2) \operatorname{ch} \frac{\alpha_{nj} b(t)}{R}} \times$$

$$\times \frac{d^2 w_s(t)}{dt^2} dt,$$

$$\left.\frac{\partial J_n\left(\frac{\alpha_{nj} r}{R}\right)}{\partial r}\right|_{r=R} = 0.$$

Таким образом, все искомые величины выражаются функциями $w_s(t)$.

На основе вариационного метода Бубнова—Галеркина из (1.1) для определения $w_s(t)$ получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами

$$\frac{d^2 w_s}{dt^2} + \Omega_s^2 w_s + \sum_{l=0}^{N} b_{ls}(t)\, w_l + \sum_{l=0}^{N} m_{ls}(t) \frac{d^2 w_l}{dt^2} = 0, \qquad (1.7)$$

$$s = 0, 1, \cdots, N.$$

Здесь

$$\Omega^2 = \frac{Eh^2}{12(1-\nu^2)\rho R^4}\left[(\lambda_s^2 + n^2)^2 + \frac{12(1-\nu^2)R^2}{h^2}\,\frac{\lambda_s^4}{(\lambda_s^2+n^2)^2}\right] + \frac{1}{Rh\rho}\left(n^2 + \frac{1}{2}\lambda_s^2\right) q,$$

$$b_{ls}(t) = \frac{Rg\rho_0 n^2}{lh\rho}\left\{\frac{1}{(\lambda_l-\lambda_s)^2}\left[1 - \cos\frac{\lambda_l-\lambda_s}{R}\, b(t)\right] - \frac{1}{(\lambda_l+\lambda_s)^2}\left[1-\cos\frac{\lambda_l+\lambda_s}{R}\, b(t)\right]\right\},$$

$$(1.8)$$

$$m_{ls}(t) = \frac{R^2\rho_0 J_n(\lambda_l)}{lh\rho\,[\lambda_l J_{n-1}(\lambda_l) - nJ_n(\lambda_l)]}\left[\frac{\sin\frac{\lambda_l-\lambda_s}{R}\, b(t)}{\lambda_l-\lambda_s} - \frac{\sin\frac{\lambda_l+\lambda_s}{R}\, b(t)}{\lambda_l+\lambda_s}\right] + \frac{R^2\rho_0}{lh\rho}\times$$

$$\times\sum_{j=1}^{\infty}\left\{A_1(l,j)\,\frac{\alpha_{nj}\,\mathrm{ch}\frac{\alpha_{nj}}{R}b(t)\sin\frac{\lambda_s}{R}b(t) - \lambda_s\,\mathrm{sh}\frac{\alpha_{nj}}{R}b(t)\cos\frac{\lambda_s}{R}b(t)}{\alpha_{nj}^2+\lambda_s^2} + \right.$$

$$\left. + A_2(l,j)\,\frac{\lambda_s + \lambda_{nj}\,\mathrm{sh}\frac{\alpha_{nj}}{R}b(t)\sin\frac{\lambda_s}{R}b(t) - \lambda_s\,\mathrm{ch}\frac{\alpha_{nj}}{R}b(t)\cos\frac{\lambda_s}{R}b(t)}{\alpha_{nj}^2+\lambda_s^2}\right\},$$

где Ω — частота собственных поперечных колебаний оболочки, загруженной равномерно распределенным внутренним давлением ([3]), m_{ls} — коэффициенты присоединенных масс, b_{ls} — коэффициенты гидростатического давления жидкости,

$$A_1(l,j) = \frac{\lambda_l}{\alpha_{nj}\left(1-\frac{n^2}{\alpha_{nj}^2}\right)(\alpha_{nj}^2+\lambda_l^2)\, J_n(\alpha_{nj})},$$

$$A_2(i, j) = \frac{\alpha_{nj} \sin \frac{\lambda_i}{R} b(t) - \lambda_i \operatorname{sh} \frac{\alpha_{nj}}{R} b(t)}{\alpha_{nj} \left(1 - \frac{n^2}{\alpha_{nj}^2}\right) (\alpha_{nj}^2 + \lambda_i^2) \operatorname{ch} \frac{\alpha_{nj}}{R} b(t) J_n(\alpha_{nj})}.$$

2. В дальнейшем рассмотрим случай $N = 0$, тогда из (1.7) имеем

$$F(t, w_0) \equiv \frac{d^2 w_0}{dt^2} + \widetilde{\Omega}_0^2(t) w_0 = 0, \tag{2.1}$$

где

$$\widetilde{\Omega}_0^2(t) = \frac{\Omega_0^2 + b_{00}(t)}{1 + m_{00}(t)} \tag{2.2}$$

— квадрат частоты собственных колебаний оболочки, частично заполненной жидкостью переменной глубины, найденной по квазистатической теории с точки зрения изменения глубины жидкости во времени.

Полагая в (2.2) $m_{00} = \text{const}$, $b_{00} = \text{const}$, получим частоту собственных колебаний оболочки, заполненной жидкостью постоянной глубины ([2])

$$\overline{\Omega}_0^2 = \frac{\Omega_0^2 + b_{00}}{1 + m_{00}}. \tag{2.3}$$

Предположим, что в течение одного (p-го) периода оболочка колеблется по закону ([4])

$$w_0(t) = C(t_p) \cos \omega_0(t_p) t, \tag{2.4}$$

где $C(t_p)$ — амплитуда, $\omega_0(t_p)$ — частота колебаний, $t_p = \dfrac{2\pi p}{\omega_0(t_p)}$ — время прохождения p-го периода колебаний.

Имея в виду, что функция (2.2) в течение одного (p-го) периода изменяется незначительно, то

$$\widetilde{\Omega}_0^2(t) \approx \widetilde{\Omega}_0(t_p) + \left.\frac{d\widetilde{\Omega}_0^2(t)}{dt}\right|_{t=t_p} (t - t_p), \qquad t_p < t < t_{p+1}. \tag{2.5}$$

Применяя для интегрирования уравнения (2.1) вариационный метод Бубнова—Галеркина, выпишем соотношение

$$\int\limits_{\frac{2\pi}{\omega_0(t_p)}(p-1)}^{\frac{2\pi}{\omega_0(t_p)}p} F[t, C(t_p) \cos \omega_0(t_p) t] \cos \omega_0(t_p) t dt = 0 \tag{2.6}$$

Учитывая (2.5), из (2.6) получим

$$\omega_0^2(t_p) - \widetilde{\Omega}_0^2(t_p)\, \omega_0(t_p) + \pi \left.\frac{d\widetilde{\Omega}_0(t)}{dt}\right|_{t=t_p} = 0. \tag{2.7}$$

Уравнение (2.7) имеет место только для определенных моментов времени. Однако, учитывая, что время существенного изменения глубины жидкости достаточно велико по сравнению с периодом колебаний, можно приближенно принимать, что уравнение (2.7) справедливо для любого момента времени в рассматриваемом интервале. Тогда уравнение (2.7) перепишем в виде

$$\omega_0^2(t) - \bar{\Omega}_0^2(t)\,\omega_0(t) + \varepsilon\,\frac{d\bar{\Omega}_0(t)}{dt} = 0. \qquad (2.8)$$

Последний член уравнения (2.8) характеризует влияние динамики изменения глубины жидкости во времени. Если $d\bar{\Omega}_0^2/dt > 0$, то динамика изменения глубины жидкости приводит к уменьшению частоты собственных колебаний оболочки. Если же $d\bar{\Omega}_0^2/dt < 0$, то имеет место обратное явление.

Институт математики и механики
Академии наук Армянской ССР

Գ. Ե. ԲԱՂԴԱՍԱՐՅԱՆ և Վ. Ց. ԳՆՈՒՆԻ

Փոփոխական խորությամբ հեղուկով լցված գլանային թաղանթի տատանումները

Դիտարկվում է փոփոխական խորությամբ, հեղուկով լցված գլանային թաղանթի տատանումների խնդիրը։

Ստացված է առնչություն թաղանթի սեփական տատանումների հաճախականության որոշման համար։

Ուսումնասիրված է հեղուկի խորության փոփոխման դինամիկայի ազդեցությունը թաղանթի սեփական տատանումների հաճախականության վրա։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *В. З. Власов.* Общая теория оболочек, Гостехиздат, 1949. [2] *John S. Mixon, Robert W. Herr*, An investigation of the vibration characteristics of pressurized thin-walled circular cylinders partly filled with liquid. Techn. Rept. NASA, 1962 (1963) Nr. R.—145. [3] *В. В. Болотин.* Динамическая устойчивость упругих систем. Гостехиздат, 1956. [4] *С. А. Амбарцумян, В. Ц. Гнуни.* „Известия АН СССР“. ОТН. Механика и машиностроение. № 6. 1964.