ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

XLI 1965 1

МАТЕМАТИКА

Б. Я. Левин и И. О. Хачатрян

Об обобщении одной теоремы Винера—Пэли для функций произвольного целого порядка и нормального типа в полуплоскости

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 15/I 1965)

1°. Известна следующая теорема Винера—Пэли ([1]).

Пусть $\Phi(x)$ — вещественная неотрицательная функция на оси $(-\infty, \infty)$ и $\Phi(x) \in L_2$. Необходимым и достаточным условием для того, чтобы в классе H_2 существовала функция $F(z)$, такая, что почти всюду $|F(x)| = \Phi(x)$, является условие

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\ln \Phi(x)|}{1+x^2}\, dx < \infty. \tag{1}$$

Если условие $\Phi(x) \in L_2(-\infty, \infty)$ заменить условием $\Phi(x) < C$, то класс H_2 надо будет заменить классом голоморфных и ограниченных в верхней полуплоскости функций. При этом условие (1) будет необходимым также в более широком классе — в классе голоморфных в верхней полуплоскости функций конечной степени.

Целью настоящей заметки является установление следующих теорем.

Теорема 1. *Пусть $\Phi(x)$ — неотрицательная ограниченная функция на $(-\infty, \infty)$ и пусть интеграл*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln \Phi(x)}{1+|x|^{p+2}}\, dx \qquad p > 0 - \textit{целое число} \tag{1'}$$

сходится. Тогда существует голоморфная в верхней полуплоскости функция $f(x)$, удовлетворяющая условиям

а) $f(z) \neq 0$ при $y > 0$

б) $|f(z)| < C \exp(c|z|^{p+1})$ $\operatorname{Im} z > 0$

в) $|f(x)| = \Phi(x)$.

Обратная теорема верна в следующей формулировке.

Теорема 1'. *Если $f(z)$ голоморфна в верхней полуплоскости и удовлетворяет условиям* а. б. в, *причем p — четное число, то интеграл* (1') *будет сходиться.*

2°. При доказательстве теоремы 1 будет использовано специальное представление гармонических функций, имеющих степенной рост в полуплоскости с помощью видоизмененного ядра Пуассона

$$k_p(t; z) = \operatorname{Im}\left[\frac{1}{t-z} - \frac{z}{t^2} - \cdots - \frac{z^p}{t^{p+1}}\right]. \tag{2}$$

Следующие утверждения доказываются по схеме доказательств лемм 2 и 3 и теоремы 4 главы V монографии ([3]).

Лемма 1. *Если $u(t)$ непрерывна на $(-\infty, \infty)$, $u(t)=0$ при $|t|<1$ и $u(t)<c|t|^{p+1}$ и существует интеграл*

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(t)\, t^{-(p+2)}\, dt, \tag{1''}$$

то существует также интеграл

$$v(z) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} u(t)\, k_p(t; z)\, dt \tag{3}$$

для любого невещественного z. При этом $v(z)$ — гармоническая в верхней полуплоскости функция со значениями $u(x)$ на $(-\infty, \infty)$ и удовлетворяющая неравенству

$$|v(z)| < C_1 + \varepsilon \frac{r^{p+1}\,|\sin(p+1)\vartheta| + |\sin p\vartheta|}{\sin^2\vartheta}, \qquad z = re^{i\vartheta}.$$

Если еще известно, что $u(t) \leq 0$ на $(-\infty, \infty)$, то справедлива оценка

$$v(z) \leq O(|z|^{p+1})$$

во всей верхней полуплоскости.

Теорема 2. *Для того, чтобы функция $u(z)$, гармоническая в полуплоскости $y>0$, непрерывная в замкнутой полуплоскости $y \geq 0$, равная нулю на отрезке $-1 \leq x \leq 1$ и удовлетворяющая условию*

$$|u(z)| < c|z|^{p+1} + c_1 \qquad \text{при } |z| \to \infty,$$

представлялась в форме

$$u(z) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} u(t)\, k_p(t; z)\, dt + \sum_{k=1}^{p+1} a_k r^k \sin k\vartheta, \qquad z = re^{i\vartheta}, \tag{4}$$

необходимо и достаточно, чтобы сходился интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(t)}{t^{p+2}}\, dt.$$

При этом коэффициенты a_k в (4) определяются формулами

$$a_m = \frac{2}{\pi r^m} \int_0^{\pi} u(re^{i\vartheta}) \sin m\vartheta\, d\vartheta + \frac{1}{\pi} \int_{-r}^{r} u(t) \left[\frac{1}{t^{m+1}} - \frac{t^{m-1}}{r^{2m}} \right] dt,$$

$$m = 1, 2, \cdots, p$$

$$a_{p+1} = \frac{2}{\pi r^{p+1}} \int_0^{\pi} u(re^{i\vartheta}) \sin (p+1) \vartheta\, d\vartheta - \frac{1}{\pi} \left[\int_{-r}^{r} \frac{u(t)\, t^p}{r^{2p+2}}\, dt + \right.$$

$$\left. + \int_{|t|>r} \frac{u(t)}{t^{p+2}}\, dt \right].$$

При иных предположениях представление (4) доказано Р. Неванлинна [3]. При доказательстве достаточности мы пользуемся следующим фактом.

Лемма 2. *Если гармоническая в верхней полуплоскости функция* $w(z)$ *удовлетворяет неравенству*

$$w(z) < c_1 + c_2 |z|^{p+1}$$

и $w(x) = 0$, *то она имеет вид*

$$w(re^{i\vartheta}) = \sum_{k=1}^{p+1} a_k r^k \sin k\vartheta,$$

где a_k — *вещественны.*

Доказательство. Продолжим $w(z)$ нечетно относительно y в нижнюю полуплоскость. Из формулы Карлемана, учитывая, что $w(x) = 0$, получим

$$\frac{1}{\pi R} \int_0^{\pi} w(Re^{i\vartheta}) \sin \vartheta\, d\vartheta = O(1),$$

или

$$\int_0^{\pi} w(Re^{i\vartheta}) \sin \vartheta\, d\vartheta = O(R).$$

Далее,

$$\int_0^{\pi} |w_+(Re^{i\vartheta}) - w_-(Re^{i\vartheta})| \sin \vartheta\, d\vartheta = O(R),$$

$$\int_0^{\pi} w_-(Re^{i\vartheta}) \sin \vartheta\, d\vartheta = O(R) + \int_0^{\pi} w_+(Re^{i\vartheta}) \sin \vartheta\, d\vartheta \le O(R) +$$

$$+ O(R^{p+1}) = O(R^{p+1}),$$

т. е.

$$\int_0^{\pi} |w(Re^{i\vartheta}) \sin \vartheta|\, d\vartheta \le O(R^{p+1}).$$

Пусть

$$w(Re^{i\vartheta}) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k R^k \sin k\vartheta.$$

Тогда

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} w(Re^{i\vartheta}) \sin k\vartheta d\vartheta = a_k R^k.$$

Далее,

$$a_k R^k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} w(Re^{i\vartheta}) \sin\vartheta \cdot \frac{\sin k\vartheta d\vartheta}{\sin\vartheta} \leqslant \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} |w(Re^{i\vartheta}) \sin\vartheta| \times$$

$$\times \left|\frac{\sin k\vartheta}{\sin\vartheta}\right| d\vartheta \leqslant c_k \int_0^{\pi} w(Re^{i\vartheta}) \sin\vartheta d\vartheta = O(R^{p+1}),$$

что возможно только в случае $a_{p+2} = a_{p+3} = \cdots = 0$.

3°. Прежде чем перейти к доказательству теорем 1 и 1', мы несколько обобщим известную формулу Карлемана

$$\sum_{\lambda<r_k<R}\left(\frac{1}{r_k} - \frac{r_k}{R^2}\right)\sin\vartheta_k = \frac{1}{\pi R}\int_0^{\pi} \ln|F(Re^{i\vartheta})|\sin\vartheta d\vartheta +$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{\lambda}^{R}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{R^2}\right)\ln|F(x)F(-x)|\,dx + O(1). \tag{5}$$

Именно при любом натуральном p верно равенство

$$\sum_{\lambda<r_k<R}\left(\frac{1}{r_k^p} - \frac{r_k^p}{R^{2p}}\right)\sin p\vartheta_k = \frac{p}{\pi R^p}\int_0^{\pi} \ln|F(Re^{i\vartheta})|\sin p\vartheta +$$

$$+\frac{p}{2\pi}\int_{-R}^{-\lambda} \ln|F(x)|\left(\frac{1}{x^{p+1}} - \frac{x^{p-1}}{R^{2p}}\right)dx + \frac{p}{2\pi}\int_{\lambda}^{R} \ln|F(x)|\left(\frac{1}{x^{p+1}} -\right.$$

$$\left.- \frac{x^{p-1}}{R^{2p}}\right)dx + O(1). \tag{6}$$

Здесь $F(z)$ — голоморфная функция в области

$$0 < \lambda \leqslant |z| \leqslant R, \qquad \operatorname{Im} z \geqslant 0, \tag{7}$$

а $a_k = r_k e^{i\vartheta_k}$ — ее корни в этой области.

Формулу (6) можно получить, применяя формулу Грина

$$\iint_D (u\Delta v - v\Delta u)\,dxdy = \int_C \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right)ds$$

к функциям $u = (r^p - R^{2p} r^{-p}) \sin p\vartheta$, $v = \ln|F(z)|$ в области (7) без кружков с центрами в точках a_k и впоследствии устремляя к нулю радиусы этих кружков.

Доказательство теоремы 1. Не нарушая общности, можно предположить, что $\Phi(x) \leq 1$ на $(-\infty, \infty)$ и $\Phi(x) = 1$ при $|x| \leq 1$.

Тогда по лемме 1 функция

$$\lambda(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \ln \Phi(t)\, k_p(t; z)\, dt$$

гармонична в верхней полуплоскости и

$$\lim_{y \to 0} \lambda(x + iy) = \ln \Phi(x)$$

$$\lambda(z) < O(|z|^{p+1}) \qquad \operatorname{Im} z > 0.$$

Голоморфная функция

$$f(z) = \exp\{\lambda(z) + i\mu(z)\},$$

где $\mu(z)$ — сопряженная с $u(z)$ гармоническая функция, будет искомой

Доказательство теоремы 1'. Так как $f(z) \neq 0$, то из формулы Карлемана (5) получим

$$0 \leq \frac{1}{\pi R} \int_0^{\pi} \ln |f(Re^{i\vartheta})| \sin \vartheta d\vartheta + \frac{1}{2\pi} \int_1^{R} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{R^2}\right) \times$$

$$\times \ln |f(x) f(-x)|\, dx + O(1).$$

Так как согласно условию $\ln|f(x) f(-x)| \leq 0$, то

$$\frac{1}{\pi R} \int_0^{\pi} \ln |f(Re^{i\vartheta})| \sin \vartheta d\vartheta \geq O(1) \tag{8}$$

при достаточно больших R. С другой стороны,

$$\int_0^{\pi} \ln |f(Re^{i\vartheta})| \sin \vartheta d\vartheta \leq O(R^{p+1}). \tag{9}$$

Из (8) и (9) следует, что

$$\int_0^{\pi} \ln |f(Re^{i\vartheta})| \sin \vartheta d\vartheta = O(R^{p+1}). \tag{10}$$

Из формулы (10) и второго условия теоремы, как и при доказательстве леммы 2, получим

$$\int_0^{\pi} |\ln |f(Re^{i\vartheta})|| \, |\sin (p+1)\vartheta| \, d\vartheta = O(R^{p+1}). \tag{11}$$

Напишем формулу (6) для $f(z) = 0$ с заменой p на $p+1$

$$
0 < \frac{1}{\pi R^{p+1}} \int_0^{\pi} \ln |f(Re^{i\theta})| \sin(p+1)\theta d\theta +
$$

$$
+ \frac{1}{2\pi} \int_{-R}^{R} \ln |f(x)| \left(\frac{1}{x^{p+2}} - \frac{x^p}{R^{2p+2}} \right) dx + O(1). \qquad (6')
$$

Из (11) и (6') следует, что при $R \to \infty$

$$
\int_{-R}^{R} \ln |f(x)| \left(\frac{1}{x^{p+2}} - \frac{x^p}{R^{2p+2}} \right) dx = O(1)
$$

или, если учесть четность p,

$$
\int_{-2R}^{2R} \frac{|\ln |f(x)||}{x^{p+2}} \left(1 - \frac{x^{2p+2}}{(2R)^{2p+2}} \right) dx < c,
$$

откуда

$$
\int_{-2R}^{2R} \frac{|\ln |f(x)||}{x^{p+2}} \left(1 - \frac{x^{2p+2}}{(2R)^{2p+2}} \right) dx < c
$$

и тем более

$$
\int_{-R}^{R} \frac{|\ln |f(x)||}{x^{p+2}} dx < c.
$$

Устремляя $R \to \infty$, получим

$$
\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\ln \Phi(x)|}{x^{p+2}} dx < \infty.
$$

Замечание. Пример функции $f(z) = e^{-z^2}$ показывает, что условие четности p нельзя отбросить. Но если $\Phi(x) = c$ при $-\infty < x < 1$, то, как видно из доказательства, условие (1') является необходимым при любом целом p.

Харьковский государственный университет
им. М. Горького

Институт математики и механики
Академии наук Армянской ССР

Վիների և Պելիի մի թեորեմի ընդհանրացումը կիսահարթությունում կամայական ամբողջ կարգի և նորմալ տիպի ֆունկցիաների համար

Հայտնի է Վիների և Պելիի հետևյալ թեորեմը[1]*. ենթադրենք $\Phi(x)$-ը կամայական ոչ բացասական իրական ֆունկցիա է $L_2(-\infty, \infty)$ դասից։ Որպեսզի H_2 դասում գոյություն ունենա մի $F(z)$ ֆունկցիա, այնպիսին, որ նրա մոդուլի եզրային արժեքները իրական առանցքի վրա համարյա ամենուրեք համընկնեն $\Phi(x)$-ի հետ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ տեղի ունենա (1) պայմանը։*

Եթե $\Phi(x) \in L_2(-\infty, \infty)$ պայմանը փոխարինենք $\Phi(x) \geq \varepsilon$ պայմանով, իսկ H_2 դասը՝ վերին կիսահարթությունում հոլոմորֆ և սահմանափակ ֆունկցիաների դասով, ապա թեորեմի եզրակացությունը դարձյալ ուժի մեջ կմնա։ Ըստ որում (1) պայմանը անհրաժեշտ է նաև այն դեպքում, երբ համապատասխան $F(z)$ ֆունկցիայի սահմանափակության պայմանը փոխարինենք ավելի թույլ պայմանով՝ $|F(z)| < C \exp c_1 |z|$։

Հոդվածում ապացուցվում է, որ եթե տեղի ունի (1') պայմանը, որտեղ $\rho > 0$ — ամբողջ թիվ է, ապա գոյություն ունի վերին կիսահարթությունում հոլոմորֆ և а. б. в պահանջներին բավարարող ֆունկցիա։ Հակադարձ թեորեմը ճիշտ է, եթե ρ-ն զույգ [illegible] թիվ է։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Н. Винер, Р. Пэли.* Преобразование Фурье в комплексной области. М., 1964. [2] *Б. Я. Левин.* Распределение корней целых функций. М., 1956. [3] *Р. Неванлинна.* Acta Soc. Sci. Fenn. 50, № 12 (1925).