ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

XXXIX 1964 4

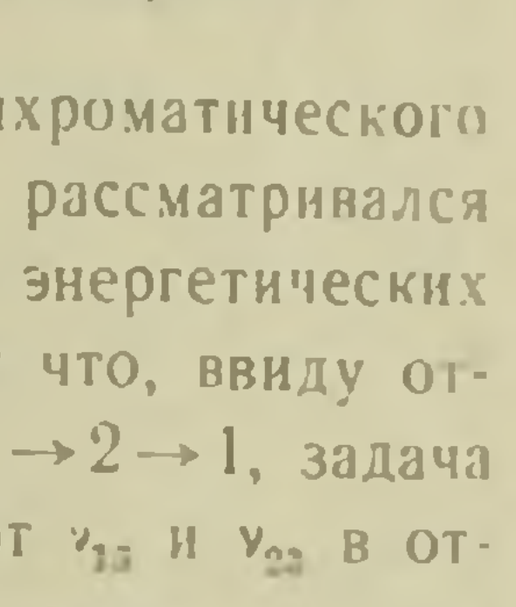
АСТРОФИЗИКА

А. Г. Никогосян

Об одной нелинейной задаче полихроматического диффузного отражения от бесконечно глубокой одномерной среды

(Представлено академиком В. А. Амбарцумяном 9/VIII 1964)

Ранее ([1]) был изучен один частный случай полихроматического чистого рассеяния в одномерной среде. При этом рассматривался случай среды, состоящей из атомов, имеющих три энергетических уровня. Второй уровень считался метастабильным, так что, ввиду отсутствия циклических переходов $1 \to 2 \to 3 \to 1$ и $1 \to 3 \to 2 \to 1$, задача сводилась к чистому рассеянию в каждой из частот ν_{13} и ν_{23} в отдельности (здесь и ниже частоты ν_{13} и ν_{23} назовем соответственно первой и второй частотами). Однако пренебрегать переходами $2 \to 1$ (обозначенный пунктиром на фиг. 1) можно не всегда, поскольку эти переходы, даже если они обладают небольшой вероятностью, все же могут повести к появлению эффектов, имеющих для некоторых задач существенное значение. Эти переходы могут быть либо спонтанными, либо происходящими в результате столкновений. Мы рассмотрим случай переходов $2 \to 1$ без излучения, вызванных ударами второго рода. При этом мы будем пренебрегать возможными переходами $1 \to 2$ в результате ударов первого рода. Другими словами, из двух взаимно противоположных циклических процессов типа $1 \to 2 \to 3 \to 1$ и $1 \to 3 \to 2 \to 1$ мы принимаем во внимание лишь цикл $1 \to 3 \to 2 \to 1$, сопровождающийся переработкой квантов первой частоты во вторую, пренебрегая вместе с тем циклическими переходами, происходящими в обратном направлении. Такое приближение верно при низкой температуре среды и при соответственно малой начальной энергии сталкивающихся частиц. При отсутствии циклических переходов условия стационарности одновременно являлись и условиями чистого рассеяния в каждой из частот. Теперь же, вследствие переходов $2 \to 1$, условия чистого рассеяния не соблюдаются. Условия стационарности имеют вид:



Фиг. 1.

$$n_1 B_{13} \rho_1 = n_3 B_{31} (\rho_1 + q_1) + n_2 b_{21},$$
$$n_2 (B_{23} \rho_2 + b_{21}) = n_3 B_{32} (\rho_2 + q_2),$$

где $q_i = \dfrac{8\pi h \nu_i^3}{c^3}$, $i = 1, 2$

и b_{21} — вероятность перехода $2 \to 1$ в результате столкновений. Вероятность выживания кванта первой частоты при элементарном акте рассеяния определяется так:

$$\lambda = \frac{n_3 B_{31} q_1}{B_{13}\left(n_1 - \frac{g_1}{g_3} n_3\right) \rho_1},$$

где g_1 и g_3 обозначают статические веса, соответственно для первого и третьего уровней. А вероятность превращения кванта первой частоты в квант второй частоты при элементарном акте рассеяния будет $1 - \lambda$.

Если имеем дело с относительно малыми интенсивностями излучения, то $\rho_1 \ll q_1$ и $\rho_2 \ll q_2$. Иначе говоря, если пренебрегать вынужденными переходами вниз по сравнению со спонтанными, то приведенные выше уравнения примут вид:

$$\begin{aligned} n_1 B_{13} \rho_1 &= n_3 B_{31} q_1 + n_2 b_{21} \\ n_2 (B_{23} \rho_2 + b_{21}) &= n_3 B_{32} q_2 \end{aligned} \qquad (1)$$

и

$$\lambda = \frac{n_3}{n_1} \cdot \frac{B_{31} q_1}{B_{13} \rho_1}. \qquad (1')$$

Определим из (1) отношение $\frac{n_3}{n_1}$, входящее в выражение для λ:

$$\frac{n_3}{n_1} = \frac{\rho_1 (\rho_2 + a)}{\frac{g_1}{g_3} q_1 (\rho_2 + a) + q_2 \frac{g_2}{g_3} b},$$

где введены обозначения:

$$\frac{b_{21}}{B_{23}} = a; \qquad \frac{b_{21}}{B_{13}} = b.$$

Теперь для λ получим:

$$\lambda = \frac{\rho_2 + a}{\rho_2 + a + \frac{g_2 q_2}{g_1 q_1} b} \Gamma$$

или

$$\lambda = \frac{1}{1 + \frac{g_2 q_2}{(\rho_2 + a) g_1 q_1} b}. \qquad (2)$$

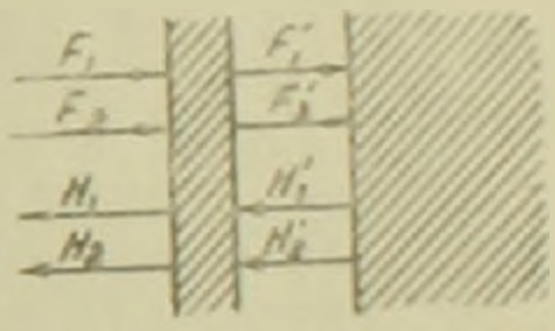
Как видно из (2), λ меньше единицы вследствие того, что часть поглощенных квантов первой частоты переизлучается во второй частоте. С другой стороны λ теперь не постоянна, а зависит от плотности излучения, в чем проявляется нелинейность настоящей задачи. По той же причине систематической переработки квантов одной частоты ($h\nu_{13}$) в кванты другой частоты становится меньше единицы и коэффициент диффузного отражения в первой частоте. Вследствие этого

целесообразно рассмотреть при этих условиях проблему диффузного отражения и прохождения.

В настоящей статье мы ограничимся задачей диффузного отражения от бесконечно глубокой одномерной среды, обладающей описанными свойствами. Пусть бесконечно глубокий слой освещается потоками света двух частот F_1 и F_2 (соответственно для ν_{13} и ν_{23}). Зададимся целью определить потоки H_1 и H_2, отраженные от среды в соответствующих частотах. Здесь и далее всегда потоки будут выражаться не в энергетических единицах, а в числах квантов. Поскольку мы рассматриваем стационарную задачу, то в каждой точке будет иметь место определенное распределение атомов по состояниям. Функцией $\varphi(F_1, F_2)$ выразим зависимость H_1 от падающего излучения. Для получения дифференциального уравнения, которому удовлетворяла бы искомая функция $\varphi(F_1, F_2)$, воспользуемся „принципом инвариантности", заключающимся в том, что прибавление к данной среде слоя бесконечно малой толщины не должно сказаться на отражательной способности среды. Для характеристики оптических свойств этого бесконечно тонкого слоя введем его оптические толщи σ_1 и σ_2, соответственно для первой и второй частот. Отношение этих оптических толщин определяется полем излучения и не может быть задано заранее. Мы определим это отношение ниже. Введем коэффициент x, заменяющий в одномерном случае индикатрису рассеяния. Он равен вероятности распространения кванта в его прежнем направлении после элементарного акта рассеяния. Если обозначим через F_1' и F_2' значения потоков, идущих вглубь от границы прибавленного слоя, то, как не трудно убедиться из фиг. 2,

$$F_1' = F_1(1 - \sigma_1) + \lambda x F_1 \sigma_1 + \lambda (1 - x) H_1 \sigma_1.$$

Ограничимся случаем изотропного рассеяния, когда $x = \frac{1}{2}$.



фиг. 2

В этом случае

$$F_1' = F_1(1 - \sigma_1) + \lambda \frac{F_1 + H_1}{2} \sigma_1. \tag{3}$$

Из (1) в качестве следствия вытекает равенство:

$$n_1 B_{13} \rho_1 + n_2 B_{23} \rho_2 = n_3 (A_{31} + A_{32}),$$

которое, как не трудно видеть, не что иное, как условие стационарности для третьего уровня, выражающее факт равенства числа поглощенных и излученных квантов. Избыток поглотивших первую частоту атомов над атомами, излучающими ту же частоту, переходит во второе состояние, излучая при этом кванты второй частоты. Принимая сказанное во внимание, получим:

$$F_2' = F_2(1-\sigma_2) + F_2\sigma_2 + (1-\lambda)\,xF_1\sigma_1 + (1-\lambda)(1-x)\,H_1\sigma_1 + \\ + (F_1 + F_2 - H_1)(1-x)\,\sigma_2,$$

а при $x = \frac{1}{2}$

$$F_2' = F_2 + (1-\lambda)\,\frac{F_1 + H_1}{2}\,\sigma_1 + \frac{F_1 - H_1}{2}\,\sigma_2, \qquad (4)$$

где λ, как и в (3), определяется из (2), а также учтено, что от бесконечно глубокого слоя в двух частотах вместе отражается ровно такое суммарное количество квантов, какое падает на него, т. е. $F_1 + F_2 = H_1 + H_2$. Пользуясь этим, можно переписать выражение (2) для λ несколько по-другому:

поскольку $\rho_2 = \frac{F_1 + 2F_2 - H_1}{c}\,h\nu_2$, то

$$\lambda = \frac{F_1 + 2F_2 - H_1 + m}{F_1 + 2F_2 - H_1 + n}, \qquad (5)$$

где $m = \frac{ca}{h\nu_2}$; $n = m + \frac{ca}{h\nu_2}\,\frac{g_2 q_2}{g_1 q_1}\,b$.

Для потока излучения, отраженного от новой границы среды, имеем:

$$H_1' = H_1(1-\sigma_1) + \lambda\,\frac{F_1 + H_1}{2}\,\sigma_1.$$

Согласно „принципу инвариантности" $H_1' = \varphi(F_1', F_2')$, отсюда

$$\varphi(F_1, F_2) = \varphi\left| F_1(1-\sigma_1) + \lambda\,\frac{F_1 + H_1}{2}\sigma_1;\ F_2 + (1-\lambda)\,\frac{F_1 + H_1}{2}\sigma_1 + \right. \\ \left. + \frac{F_1 - H_1}{2}\,\sigma_2 \right| - H_1\sigma_1 + \lambda\,\frac{F_1 + H_1}{2}\,\sigma_1.$$

Разлагая в ряд по степеням σ_1, получим нужное дифференциальное уравнение для $\varphi(F_1, F_2)$:

$$\left(-F_1 + \lambda\,\frac{F_1 + H_1}{2}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial F_1} + \left| (1-\lambda)\,\frac{F_1 + H_1}{2} + \frac{F_1 - H_1}{2}\,\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right|\frac{\partial\varphi}{\partial F_2} - \\ - H_1 + \lambda\,\frac{F_1 + H_1}{2} = 0,$$

где следует помнить, что отношение оптических толщ также зависит от плотности излучения. Как известно, можно написать:

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_1} = k'\,\frac{n_2}{n_1}, \quad \text{где} \quad k' = \frac{B_{23}\nu_2\Delta\nu_1}{B_{13}\nu_1\Delta\nu_2} \quad (1,3)$$

и где $\Delta\nu_1$ и $\Delta\nu_2$ — эффективные ширины соответствующих линий.

Определим $\frac{n_2}{n_1}$ из (1):

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{B_{13}p_1B_{32}q_2}{B_{31}q_1(B_{23}p_2 + b_{21}) + b_{21}B_{32}q_2},$$

или

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{g_2q_2}{g_1q_1} \frac{p_1}{p_2 + a + \frac{g_2q_2}{g_1q_1} b},$$

и для $\frac{\sigma_2}{\sigma_1}$ получим:

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_1} = k \frac{F_1 + H_1}{F_1 + 2F_2 - H_1 + n}, \qquad (6)$$

где $k = \frac{B_{23}q_2g_2\Delta\nu_1}{B_{13}q_1g_1\Delta\nu_2}$.

Для простоты введем обозначения $F_1 = y$, $F_2 = y_2$, $H_1 = z$. Тогда окончательно (учитывая (5) и (6)) наше уравнение примет вид: (ср. с (21) [2])

$$\left(-y_1 + \frac{y_1 + 2y_2 - z + m}{y_1 + 2y_2 - z + n} \frac{y_1 + z}{2}\right) \frac{\partial z}{\partial y_1} +$$

$$+ \frac{n - m + k(y_1 - z)}{y_1 + 2y_2 - z + n} \frac{y_1 + z}{2} \frac{\partial z}{\partial y_2} + \frac{y_1 + 2y_2 - z + m}{y_1 + 2y_2 - z + n} \frac{y_1 + z}{2} = 0. \qquad (7)$$

Итак, задача сводится к решению квазилинейного уравнения с частными производными, решив которое, получим искомую зависимость отраженного от среды потока первой частоты H_1 от падающих на среду потоков F_1 и F_2.

Уравнения характеристик суть:

$$\frac{dy_1}{-y_1 + \frac{y_1 + 2y_2 - z + m}{y_1 + 2y_2 - z + n} \frac{y_1 + z}{2}} =$$

$$= \frac{dy_2}{\frac{n - m + k(y_1 - z)}{y_1 + 2y_2 - z + n} \frac{y_1 + z}{2}} = \frac{dz}{z - \frac{y_1 + 2y_2 - z + m}{y_1 + 2y_2 - z + n} \frac{y_1 + z}{2}};$$

$$dy_1 = \frac{-y_1 + \frac{y_1 + 2y_2 - z + m}{y_1 + 2y_2 - z + n} \frac{y_1 + z}{2}}{\frac{n - m + k(y_1 - z)}{y_1 + 2y_2 - z + n} \frac{y_1 + z}{2}} dy_2, \qquad (8)$$

$$dz = \frac{z - \frac{y_1 + 2y_2 - z + m}{y_1 + 2y_2 - z + n} \frac{y_1 + z}{2}}{\frac{n - m + k(y_1 - z)}{y_1 + 2y_2 - z + n} \frac{y_1 + z}{2}} dy_2, \qquad (9)$$

вычтя из (8) и (9), имеем:

$$d(y_1 - z) = -\frac{2(n - m)}{n - m + k(y_1 - z)} dy_2$$

и получаем первый интеграл

$$(n-m)(y_1+2y_2-z)+\frac{k}{2}(y_1-z)^2=c_1.$$

Для получения второго интеграла, исходим из уравнения:

$$\left(z-\frac{y_1+2y_2-z+m}{y_1+2y_2-z+n}\,\frac{y_1+z}{2}\right)dy_1=$$

$$=\left(-y_1+\frac{y_1+2y_2-z+m}{y_1+2y_2-z+n}\,\frac{y_1+z}{2}\right)dz;$$

$$2d(zy_1)=\frac{y_1+2y_2-z+m}{y_1+2y_2-z+n}(y_1+z)\,d(y_1+z),$$

или же

$$2nd(zy_1)=(y_1+2y_2-z)(y_1-z)\,d(y_1-z)+m(y_1+z)\,d(y_1+z)$$

несколько преобразуя, придем к выражению, которым воспользуемся ниже:

$$nd(zy_1)=\frac{(y_1+2y_2-z)(y_1-z)\,d(y_1-z)}{2}+\frac{m-n}{2}(y_1+z)\,d(y_1+z)+$$

$$+\frac{n}{2}(y_1+z)\,d(y_2+z),$$

$$\frac{n-m}{2}(y_1+z)\,d(y_1+z)=\frac{y_1+2y_2-z+n}{2}(y_1-z)\,d(y_1-z). \quad (10)$$

С другой стороны, складывая (8) и (9), получим:

$$\frac{n-m}{2}(y_1+z)\,d(y_1+z)+\frac{k}{2}(y_1-z)(y_1+z)\,d(y_1+z)=$$

$$=-(y_1+2y_2-z+n)(y_1-z)\,dy_2,$$

Вместе с (10) оно дает

$$(y_1+2y_2-z+n)\,d(y_1-z)+k(y_1+z)\,d(y_1+z)=$$

$$=-2(y_1+2y_2-z+n)\,dy_2$$

и находим второй интеграл

$$(y_1+2y_2-z+n)^2+k(y_1+z)^2=c_2.$$

Уравнение $G(I_1, I_2)=0$, где G — произвольная функция своих аргументов, дает решение нашего уравнения в неявной форме. Решение нашего уравнения (7) станет определенным, если учесть начальное условие $z=0$ при $y_1=0$. Физически оно выражает факт отсутствия отраженного от среды излучения первой частоты, если в этой частоте на среду ничего не падает. При этом y_2 может быть любым. Подставляя $y_1=0$, $z=0$ в I_1, получим

$$2y_2=\frac{c_1}{n-m},$$

сопоставляя с I_2, имеем

$$\left(\frac{c_1}{n-m}+n\right)^2=c_2$$

и получаем:

$$(n-m)(y_1+2y_2-z+n)(y_1-z)^2+\frac{\kappa}{4}(y_1-z)^4-(n-m)^2(y_1+z)^2=0. \tag{11}$$

Введя новые переменные

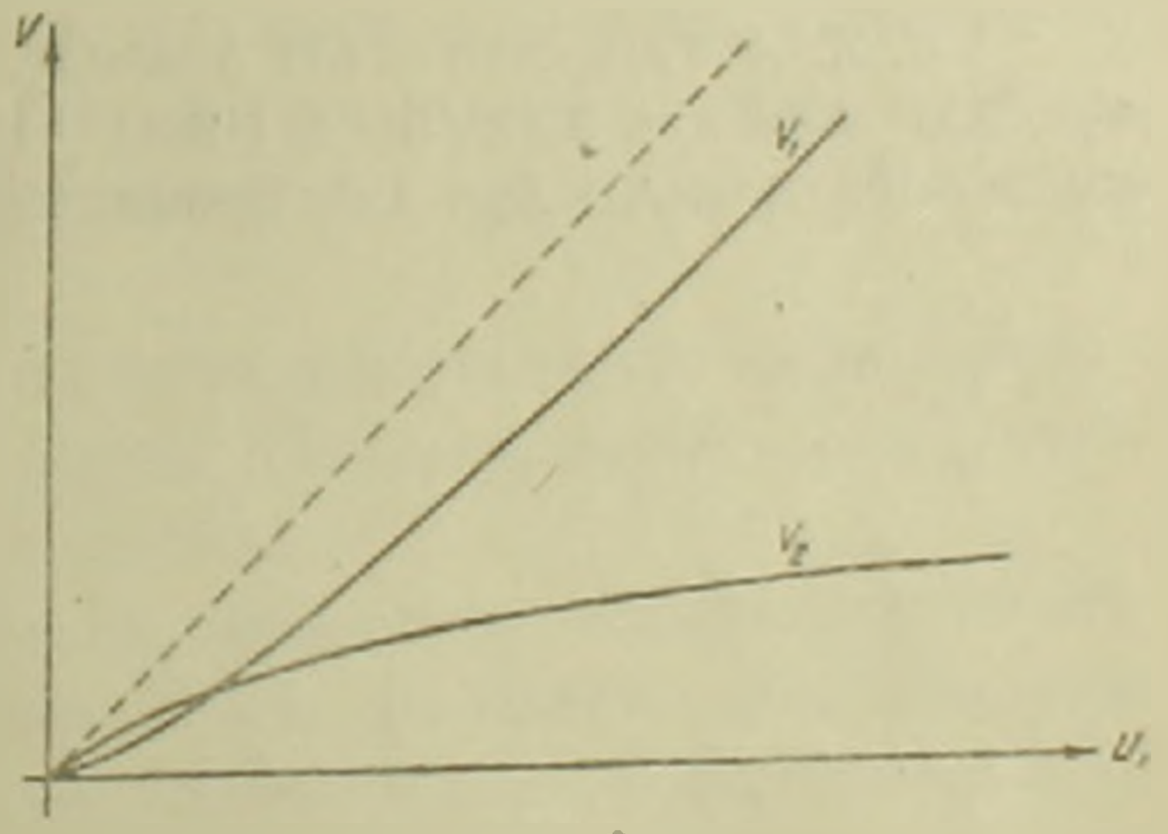
$$u_1=\frac{y_1}{n},\quad u_2=\frac{y_2}{n},\quad v_1=\frac{z}{n},$$

приведем полученное решение к более удобному для исследования виду:

$$\alpha(u_1+2u_2-v_1+1)(u_1-v_1)^2+\beta(u_1-v_1)^4+(u_1+v_1)^2=0,$$

где $\alpha=\frac{n}{n-m}$; $\beta=\frac{k\alpha^2}{4}$ — постоянные, не имеющие размерности.

Особый интерес представляет случай, когда отсутствует падающее на среду излучение второй частоты ($u_2=0$). Применяя для облегчения вычислений поворот координатных осей на угол $\frac{\pi}{4}$ в плоскости (u_1, v_1), можно построить зависимость $v_1(u_1)$, а следовательно и $v_2(u_1)$, соответственно для отраженного от среды потока во второй частоте. Эти зависимости приведены на прилагаемом графике (фиг. 3).



Фиг. 3.

Как видно из графика, при больших u_1 и, следовательно, больших полях излучения в обеих частотах, атомы, попавшие на второй уровень, скорее возвращаются на третий уровень (поглощая квант $h\nu_{23}$) и далее на первый, нежели спускаются вниз путем соударений, реализуя переход $2\to1$. В случае $u_2\neq0$, мы получаем для разных u_2 семейство кривых $v_1(u_1)$, причем большим u_2 соответствуют кривые, расположенные выше. С другой стороны, при одном и том же значении u_1, чем больше u_2, т. е. падающее на среду излучение второй частоты, тем ближе задача к случаю чистого рассеяния, что видно и из (2).

В заключение выражаю благодарность академику В. А. Амбарцумяну, под руководством которого была выполнена настоящая работа.

Бюраканская астрофизическая обсерватория
Академии наук Армянской ССР

Ա. Գ. ՆԻԿՈՂՈՍՅԱՆ

Անվերջ խոր միաչափ միջավայրից դիֆուզ պոլիխրոմատիկ անդրադարձման ոչ գծային մի խնդրի մասին

Գոյություն ունի պզտոր միջավայրում լույսի ցրման խնդիրների ամբողջ մի շարք, որոնցում առկա են ճառագայթման մեծ խտություններ։ Այդ դեպքում հնարավոր չէ արհամարհել միջավայրի օպտիկական հատկությունների վրա ընկնող ճառագայթման ազդեցությունը։ Առանձին հետաքրքրություն են ներկայացնում ատոմների ըստ վիճակների վերաբաշխման հետ կապված էֆեկտները, որոնք ճառագայթման մեծ խտությունների դեպքում դառնում են կարևոր։ Այդ տեսակետից ուշադրավ է դիտարկել անվերջ խոր միաչափ միջավայրից պոլիխրոմատիկ դիֆուզ անդրադարձման խնդիրը։ Ենթադրենք, որ երկու էներգետիկ մակարդակ ունեցող ատոմներից բաղկացած միջավայրը լուսավորվում է F_1 և F_2 հոսքերով $3\to1$ և $3\to2$ անցումներին համապատասխանող ν_1 և ν_2 հաճախականություններում։ Երկրորդ մակարդակը հնարավոր է միտաստաբիլ, ըստ որում հաշվի են առնվում $2\to1$ հարվածների շնորհիվ կատարվող անցումները։ Միևնույն ժամանակ արհամարհվում են նույն հարվածների պատճառով հնարավոր $1\to2$ անցումները։ Ուրիշ խոսքով հաշվի է առնվում միայն $1\to3\to2\to1$ մեկ ուղղությամբ կատարվող ցիկլը, որի հետևանքով $h\nu_2$ քվանտերը սիստեմատիկաբար վերածվում են $h\nu_1$ քվանտերի։ Այդ մոտավորությունը ճիշտ է միջավայրի ցածր ջերմաստիճանի և համապատասխանաբար հարվածող մասնիկների փոքր սկզբնական էներգիայի դեպքում։ Քվանտի վերաբերյալ հավանականություններ ցրման էլեմենտար ակտի ժամանակ 1-ն տրվում է (5)-ով, իսկ $\frac{\sigma_2}{\sigma_1}$ օպտիկական հաստություններն հարաբերությունը՝ (6)-ով։ Բանաձևերից երևում է, որ այդ մեծությունների արժեքները կախված են ճառագայթման դաշտի խտություններից, որով բնորոշվում է խնդրի ոչ գծայնությունը։ Կիրառելով ինվարիանտության սկզբունքը, $\varphi(F_1, F_2)$ առաջին հաճախականությունում անդրադարձած հոսքի համար ստացվում է կվազիգծային մասնավոր ածանցյալներով ֆունկցիոնալ հավասարում (7)։ Նրա լուծումը մեզ տալիս է $H_1=\varphi(F_1, F_2)$-ը անբացահայտ տեսքով (11)։ Վերջում քննարկվում է մեկ մասնավոր դեպքը, երբ՝ $F_2=0$։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *В. А. Амбарцумян.* ДАН АрмССР. т. XXXIX, № 4 (1964). [2] *В. А. Амбарцумян*, ДАН АрмССР, XXXVIII. 4 (1964). [3] *В. А Амбарцумян*, Научные труды, т. I, стр. 78—102, Изд. АН АрмССР, Ереван, 1960.