МАТЕМАТИКА

С. О. Синанян

Некоторые оценки для класса ограниченных на дуге окружности многочленов и их производных

(Представлено академиком АН Армянской ССР С. Н. Мергеляном 7/IV 1964)

Отправным пунктом для наших оценок служат экстремальные многочлены n-го порядка

$$M_n(e^{i\theta})=e^{\frac{in\theta}{2}}\cdot\cos\left(n\arccos\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}\right).$$

Рассмотрим класс A_α^n $(0<\alpha<\pi)$ алгебраических многочленов $P_n(z)$ степени не выше n $(n=1,2,3\ldots)$, удовлетворяющих условию

$$|P_n(e^{i\theta})|\leqslant 1\ \ (|z|=1,\ \ |\arg z|\leqslant\alpha).$$

В работе [1] доказана справедливость неравенств

$$|P_n(e^{i\theta})|\leqslant|M_n(e^{i\theta})|\ \text{ при } \alpha\leqslant|\theta|\leqslant\pi; \tag{*}$$

$$\max_{|z|=1}|P_n'(z)|\leqslant\frac{n}{2}\cdot\left(\operatorname{tg}^n\frac{\alpha}{4}+\operatorname{ctg}^n\frac{\alpha}{4}\right). \tag{**}$$

Здесь мы докажем неравенства такого же типа для дуги окружности и на всей комплексной плоскости.

Лемма 1. *Пусть*

$$z_k^{(n)}=e^{i\cdot\mu_k^{(n)}},\quad \mu_k^{(n)}=2\arcsin\left(\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{2k-1}{2n}\pi\right),\ k=1,2,\cdots,n,$$

суть корни многочлена $M_n(z)$. Тогда для всякого полинома $P_{n-1}(z)$ степени не выше $n-1$ справедливо тождество

$$P_{n-1}(z)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k\cdot\frac{P_{n-1}(z_k^{(n)})}{a_k^{(n)}}\cdot\frac{M_n(z)}{z-z_k^{(n)}}, \tag{1}$$

где

$$a_k^{(n)}=\frac{i}{2}\,e^{i\frac{n-2}{2}\mu_k^{(n)}}\cdot\frac{\sqrt{1-\sin^2\frac{\alpha}{2}\cdot\cos^2\frac{2k-1}{2n}\pi}}{\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{2k-1}{2n}\pi},\ k=1,2,\cdots,n.$$

Доказательство. Выражение

$$\frac{M_n(z)}{z - z_k^{(n)}}$$

есть многочлен степени $n-1$. Пусть j есть одно из чисел $1, 2, \cdots, n$. Если $k \neq j$, то

$$\frac{M_n(z_j^{(n)})}{z_j^{(n)} - z_k^{(n)}} = 0.$$

Заметим, что

$$\lim_{z \to z_j^{(n)}} \frac{M_n(z)}{z - z_j^{(n)}} = M_n'(z_j^{(n)}).$$

Поэтому имеем

$$\lim_{z \to z_j^{(n)}} \frac{M_n(z)}{z - z_j^{(n)}} = (-1)^j \cdot n \cdot a_j^{(n)}, \ j = 1, 2, \cdots, n.$$

Таким образом правая часть доказываемого тождества при $z = z_j^{(n)}$ становится равной $P_{n-1}(z_j^{(n)})$, т. е. совпадает с его левой частью. Но так как и правая и левая части этого тождества суть полиномы степени не высшей, чем $n-1$, то из совпадения их в n точках $z_j^{(n)}$ и вытекает их тождественность.

Лемма 2. *Для многочленов порядка не выше n справедливо тождество*

$$P_n(z) = C_n \cdot M_n(z) + \frac{z}{n} \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \cdot \frac{P_n(z_k^{(n)})}{z_k^{(n)} \cdot a_k^{(n)}} \cdot \frac{M_n(z)}{z - z_k^{(n)}}, \tag{2}$$

где

$$C_n = P_n(0) / M_n(0).$$

Доказательство. Как легко видеть, разность

$$P_n(z) - \frac{z}{n} \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{P_k^{(n)} \cdot z_k^{(n)}}{z_k^{(n)} \cdot a_k^{(n)}} \cdot \frac{M_n(z)}{z - z_k^{(n)}}$$

обращается в нуль в n разных точках $z_k^{(n)}$, $k = 1, 2, \cdots, n$, и поэтому является многочленом порядка n, если $P_n(0) \neq 0$. Но нули этой разности совпадают с нулями многочлена $M_n(z)$, и поэтому можно утверждать, что она только постоянным множителем отличается от этого многочлена. Положив $z = 0$, получим

$$C_n = P_n(0) / M_n(0).$$

В случае $P_n(0) = 0$ указанная разность обращается в нуль в $n+1$ точках: $z_k^{(n)}$, $k = 1, 2, \cdots, n$, $z = 0$, и поэтому, будучи многочленом порядка не выше n, тождественно равна нулю. В этом случае $C_n = 0$.

Теорема 1. *Для многочленов $P_n(z)$ класса A_n^n справедливо неравенство*

$$|P_n(z)| \leqslant 2 \cdot \left\{ \frac{1}{\cos\frac{\alpha}{2}} + \frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{n} |z| \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{|z - z_k^{(n)}|} \right\} \cdot |M_n(z)| \qquad (3)$$

во всей комплексной плоскости.

Доказательство. Согласно неравенству (1) имеем

$$|P_n(0)| \leqslant \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{|M_{n+1}(0)|}{|a_k^{(n+1)}|}.$$

Так как [1]

$$M_{n+1}(0) = \frac{(-i)^{n+1}}{2\sin^{n+1}\frac{\alpha}{2}}, \quad \frac{1}{|a_k^{(n+1)}|} < 2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2},$$

то имеем, что

$$|P_n(0)| < \frac{1}{\cos\frac{\alpha}{2} \cdot \sin^n\frac{\alpha}{2}}. \qquad (4)$$

Из последней оценки получаем, что для любого многочлена класса A_α^n постоянная в тождестве (2) имеет оценку

$$|C_n| < \frac{2}{\cos\frac{\alpha}{2}}. \qquad (5)$$

Последние оценки дают возможность легко получить утверждение теоремы.

Теорема 2. *Для многочленов класса A_α^n справедливо неравенство*

$$|P_n^1(e^{i\theta})| \leqslant \frac{n \cdot \cos\frac{\theta}{2}}{\sqrt{\sin^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}}}, \quad |\theta| \leqslant \alpha. \qquad (6)$$

Доказательство следует из оценки производной тригонометрического многочлена работы ([2]).

Неравенство (6) точное в смысле порядка. Это видно из оценки

$$|M_n'(e^{i\theta})| \leqslant \frac{n}{2} \cdot \frac{\sin^2\frac{\theta}{2}}{\sqrt{\sin^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}}},$$

где при $\theta = \mu_k^{(n)}$, $k = 1, 2, \cdots, n$, имеет место равенство. Неравенство (6) является обобщением классического неравенства С. Н. Бернштейна, ибо предельный переход в его правой части при $\alpha \to \pi$ дает неравенство С. Н. Бернштейна для производной многочлена на единичном круге.

Теорема 3. *Для многочленов класса A^n_α справедлива оценка*

$$|P'_n(z)| < 2\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{|z - z_k^{(n)}|}\right) \cdot |M_n(z)|. \tag{7}$$

во всей комплексной плоскости.

Согласно неравенству (6) имеем, что

$$|P'_n(z_k^{(n)})| < \frac{n\sqrt{1 - \sin^2\frac{\alpha}{2}\cdot\cos^2\frac{2k-1}{2n}\pi}}{\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{2k-1}{2n}\pi}, \quad k = 1, 2, \cdots, n.$$

Используя эти оценки и переходя к модулям в тождестве (1), получим оценку (7).

Лемма 3. *Функция*

$$S_n(e^{i\theta}) = e^{\frac{in\theta}{2}}\cdot\sin\left[(n+1)\arccos\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}\right] : \sqrt{1 - \frac{\sin^2\frac{\theta}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2}}}$$

есть алгебраический многочлен степени n относительно $e^{i\theta}$.

Доказательство. Производная полиномов Чебышева $T_{n+1}(x)$ порядка $n+1$ равна

$$\frac{(n+1)\cdot\sin[(n+1)\arccos x]}{\sqrt{1-x^2}},$$

причем $T'_{n+1}(x)$ содержит только четные степени x, если n — четное число, и только нечетные степени x, если v — нечетное число. В силу этого замечания, применив формулу Эйлера, легко теперь показать, что $S_n(e^{i\theta})$ является многочленом порядка n относительно $e^{i\theta}$.

Лемма 4. *Для многочленов порядка не выше n справедливо тождество*

$$P_n(z) = C'_n\cdot M_n(z) + \frac{z+1}{2n}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\frac{P_n(z_k^{(n)})}{\sqrt{z_k^{(n)}}\cdot a_k^{(n)}\cdot\cos\frac{\mu_k^{(n)}}{2}}\cdot\frac{M_n(z)}{z - z_k^{(n)}},$$

где

$$|C'_n| < 1.$$

Доказательство совершенно аналогично доказательству тождества (2). Оценка $|C'_n| \leqslant 1$ следует из неравенства (*).

Лемма 5. *Имеет место тождество*

$$\frac{\sin\left(n\arccos\dfrac{\sin\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}\right)}{\sqrt{\sin^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}}}=\cos\left(n\arccos\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}\right)\times$$

$$\times\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sin\dfrac{\theta-\mu_k^{(n)}}{2}\cdot\sqrt{1-\sin^2\dfrac{\alpha}{2}\cdot\sin^2\dfrac{2k-1}{2n}\pi}}.$$

Это тождество легко получается применением к $S_{n-1}(z)$ тождества (1).

Теорема 4. *Для многочленов класса* A_α^n *справедлива оценка*

$$|P_n'(e^{i\theta})|\leqslant n\sqrt{n^2\cdot\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}+1}\qquad \text{при } |\theta|\leqslant\alpha. \tag{8}$$

Это есть аналог неравенства А. А. Маркова для многочленов на отрезке.

Доказательство. Рассмотрим сначала такие значения θ, которые удовлетворяют неравенству $|\theta|\leqslant\mu_1^{(n-1)}$. Для рассматриваемых значений θ имеем

$$\frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sqrt{\sin^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}}}\leqslant 1:\sqrt{1-\frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\mu_1^{(n-1)}}{2}}}=$$

$$=\sqrt{1+\frac{1}{\sin^2\dfrac{\pi}{2n-2}}\cdot\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}}\leqslant\sqrt{(n-1)^2\cdot\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}+1}.$$

Поэтому в силу (6) получаем, что оценка (8) верна при $|\theta|\leqslant\mu_1^{(n-1)}$.

Теперь допустим, что выполнено неравенство

$$\mu_1^{(n-1)}\leqslant|\theta|\leqslant\alpha.$$

Применяя к $P_n'(z)$ тождество леммы (4), переходя к модулям и использовав оценку (6), получим

$$|P_n'(z)|\leqslant|M_{n-1}(z)|+\frac{|z+1|}{2(n-1)}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{2n}{\cos\dfrac{\mu_k^{(n-1)}}{2}}\cdot\frac{|M_{n-1}(z)|}{|z-z_k^{(n-1)}|}.$$

Положив теперь $z=e^{i\theta}$, будем иметь

$$|P_n'(e^{i\theta})|\leqslant|M_{n-1})\,e^{i\theta}|+\cos\frac{\theta}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{n\,|M_{n-1}(e^{i\theta})|}{(n-1)\cos\dfrac{\mu_k^{(n-1)}}{2}\cdot\left|\sin\dfrac{\theta-\mu_k^{(n-1)}}{2}\right|}.$$

Но для рассматриваемых значений θ все $\sin\frac{\theta-\mu_k^{(n-1)}}{2}$, $k=1,2,\ldots,n-1$ имеют один и тот же самый знак. Поэтому последнюю оценку можно записать в следующей форме

$$|P_n'(e^{i\theta})| \leqslant |M_{n-1}(e^{i\theta})| + \frac{n}{n-1}\cos\frac{\theta}{2}\times$$

$$\times|M_{n-1}(e^{i\theta})|\left|\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\cos\frac{\mu_k^{(n-1)}}{2}\cdot\sin\frac{\theta-\mu_k^{(n-1)}}{2}}\right|.$$

Далее, в силу леммы (5) получаем оценку

$$|P_n'(e^{i\theta})| \leqslant |M_{n-1}(e^{i\theta})| +$$

$$+\frac{n\cos\frac{\theta}{2}\cdot\sin\left[(n-1)\arccos\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}\right]}{\sqrt{\sin^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}}} = \psi(\theta).$$

Положив $\theta=2\arcsin\left(\sin\frac{\alpha}{2}\cos x\right)$, $0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2n-2}$, получим

$$\psi(\theta)=\cos(n-1)x+\frac{n\sin(n-1)x\cdot\sqrt{1-\sin^2\frac{\alpha}{2}\cdot\cos^2 x}}{\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin x}.$$

Обозначим

$$\psi(x)=\cos(n-1)x+\frac{n\sin(n-1)x\sqrt{1-\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos^2 x}}{\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin x}.$$

Имеем

$$\max_{\mu_1^{(n-1)}\leqslant|\theta|\leqslant\alpha}\psi(\theta)=\max_{0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2n-2}}\psi(x).$$

Можно доказать, что

$$\max_{0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2n-2}}\psi(x)\leqslant n\sqrt{n^2\cdot\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}+1}.$$

Неравенство (8) доказано.

Неравенство (8) точное в смысле порядка, ибо, например,

$$\max_{|\theta|\leqslant\alpha}|M_n'(e^{i\theta})|=\frac{n}{2}\sqrt{n^2\cdot\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}+1}.$$

Я думаю, что неравенства (6) и (8) точные и экстремальными многочленами являются многочлены Чебышева (при соответствующей нормировке) для рассматриваемой дуги окружности.

Заметим, что неравенство (8) также является обобщением классического неравенства С. Н. Бернштейна и что последнее получается из (8) путем предельного перехода в его правой части при $\alpha \to \pi$.

Неравенства типа (6) и (8) были получены И. П. Приваловым [4] и Джексоном [5] для тригонометрических полиномов. В дальнейшем их оценки уточнил В. С. Виденский [3].

Институт математики и механики
Академии наук Армянской ССР

Ս. Հ. ՍԻՆԱՆՅԱՆ

Շրջանային աղեղի վրա սահմանափակ բազմանդամների և նրանց ածանցյալների մի քանի գնահատականների մասին

Դիտարկվում է միավոր շրջանագծի աղեղի վրա սահմանափակ n-ից ոչ բարձր կարգ ունեցող բազմանդամների դասը։ Այդ դասի բազմանդամների և նրանց ածանցյալների համար ստացվում են կարգի տեսակետից ճշգրիտ գնահատականներ, ինչպես դիտարկվող աղեղի վրա, այնպես էլ ամբողջ հարթության մեջ։ Աղեղի վրա նշված դասի բազմանդամների ածանցյալների գնահատականից մասնավորապես ստացվում է միավոր շրջանում բազմանդամի ածանցյալի համար Ս. Ն. Բեռնշտեյնի կլասիկ անհավասարությունը։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *С. О. Синанян*, Успехи мат. наук, XVIII, 2 (110) (1963). [2] *В. С. Виденский*, ДАН СССР, 130, № 1 (1960). [3] *И. П. Натансон*, Конструктивная теория функций, М.—Л., 1949. [4] *И. П. Привалов*, Интеграл Коши, Саратов, 1919. [5] *Д. Джексон*, Bull. Am. Math. Soc., 37, 883 (1931).