

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

В. С. Саркисян

Некоторые задачи об изгибе анизотропных  
 призматических стержней с сечениями в виде удлиненных  
 профилей

(Представлено академиком АН Армянской ССР Н. Х. Арутюняном 2/II 1961)

В настоящей статье рассматривается задача об изгибе анизотропных (неортоотропных) стержней с поперечными сечениями в виде удлиненных эллипса, трапеции и треугольника. Решение представляется в виде ряда по степеням малого параметра  $\lambda$ , введенного в уравнение контура области.

Получены в замкнутом виде выражения для функции напряжения, касательных напряжений и центра изгиба.

1. Выберем начало координат в центре тяжести незакрепленного конца стержня. Примем геометрическую ось стержня за ось  $z$ , а оси  $x$  и  $y$  совместим с главными осями инерции сечения. Примем далее, что силы, действующие на свободном конце, статически эквивалентны одной равнодействующей  $P$ , направленной по оси  $y$ .

Пусть область сечения стержня с удлиненным симметричным профилем ограничена двумя дугами кривых

$$\begin{aligned} y &= \lambda f(x) \\ 0 &< \lambda < 1. \\ y &= -\lambda f(x) \end{aligned} \tag{1.1}$$

В этом случае напряженное состояние в сечении стержня будет

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_y = \tau_{xy} = 0, \\ \sigma_z &= -\frac{P}{I} \cdot zy, \\ \tau_{xz} &= \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad \tau_{yz} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{P}{2I} \cdot [y^2 - \lambda^2 f^2(x)]. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Здесь  $\Psi(x, y)$  — функция напряжений,  $I$  — момент инерции относительно главной оси  $x$ , который определяется так

$$I = \int_{-b_1}^{b_2} \int_{-\lambda f}^{\lambda f} y^2 dx dy = \lambda^3 I_0, \quad (1.3)$$

где

$$I_0 = \frac{2}{3} \cdot \int_{-b_1}^{b_2} f^3(x) dx.$$

Как известно (1), задача об изгибе неортотропных стержней сводится к решению уравнения

$$a_{44} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - 2a_{45} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} + a_{55} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = -\frac{P}{I} \times \\ \times (2a_{13}x + a_{36}y) - 2\vartheta - \frac{a_{44}P\lambda^2 Df^2}{2I} - a_{45} \cdot \frac{P}{I} \cdot y, \quad (1.4)$$

с граничным условием на контуре  $s$

$$\Psi|_s = \frac{P}{2I} \cdot \int_0^s (y - \lambda f)(y + \lambda f) dx = 0. \quad (1.5)$$

Здесь  $a_{ik}$  — упругие постоянные,  $\vartheta$  — постоянная, характеризующая угол закручивания на единицу длины. Для решения уравнения (1.4) с граничным условием (1.5) воспользуемся методом, развитым в (2-4).

Производим такие преобразования

$$y = \lambda \eta \quad \Psi(x, y) = \frac{P}{I_0} \cdot \Phi(x, \eta; \lambda), \quad \vartheta = \frac{P}{I_0} \cdot \Theta. \quad (1.6)$$

Тогда (1.4) и (1.5) можно представить так

$$\lambda^3 a_{44} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - 2\lambda^2 a_{45} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial \eta} + \lambda a_{55} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} = \\ = -2a_{13}x - \lambda \eta (a_{36} + a_{45}) - \lambda^2 a_{44} \frac{Df^2}{2} - 2\Theta \lambda^3. \quad (1.7)$$

$$\Phi[x, \pm f(x); \lambda] = 0. \quad (1.8)$$

Представим решение дифференциального уравнения с частными производными с неразделяющимися переменными (1.7) в виде ряда по степеням малого параметра

$$\Phi(x, \eta; \lambda) = \frac{Q_{-1}(x, \eta)}{\lambda} + \sum_{k=0}^{\infty} Q_k(x, \eta) \cdot \lambda^k. \quad (1.9)$$

Тогда из (1.8) получаются

$$Q_k[x, \pm f(x)] = 0 \quad (k = -1, 0, 1, 2, \dots) \quad (1.10)$$

Подставляя значения  $\Phi(x, \eta; \lambda)$  из (1.9) в (1.7), сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях  $\lambda$ , находим

$$a_{55} \cdot \frac{\partial^2 Q_{-1}}{\partial \eta^2} = -2a_{13}x$$

$$-2a_{45} \cdot \frac{\partial^2 Q_{-1}}{\partial x \partial \eta} + a_{55} \cdot \frac{\partial^2 Q_0}{\partial \eta^2} = -\tau_1 (a_{36} + a_{45})$$

$$a_{44} \cdot \frac{\partial^2 Q_{-1}}{\partial x^2} - 2a_{45} \cdot \frac{\partial^2 Q_0}{\partial x \partial \eta} + a_{55} \cdot \frac{\partial^2 Q_1}{\partial \eta^2} = -\frac{a_{44} Df^2}{2}$$

$$a_{44} \cdot \frac{\partial^2 Q_0}{\partial x^2} - 2a_{45} \cdot \frac{\partial^2 Q_1}{\partial x \partial \eta} + a_{55} \cdot \frac{\partial^2 Q_2}{\partial \eta^2} = -2\theta$$

$$a_{44} \cdot \frac{\partial^2 Q_k}{\partial x^2} - 2a_{45} \cdot \frac{\partial^2 Q_{k+1}}{\partial x \partial \eta} + a_{55} \cdot \frac{\partial^2 Q_{k+2}}{\partial \eta^2} = 0 \quad (k = 1, 2, 3, \dots). \quad (1.11)$$

Из рекуррентных уравнений (1.11) при помощи (1.10) последовательно можно определить неизвестные функции  $Q_k(x, \eta)$  ( $k = -1, 0, 1, 2, \dots$ ), как это сделано в (4).

Рассмотрим конкретные случаи.

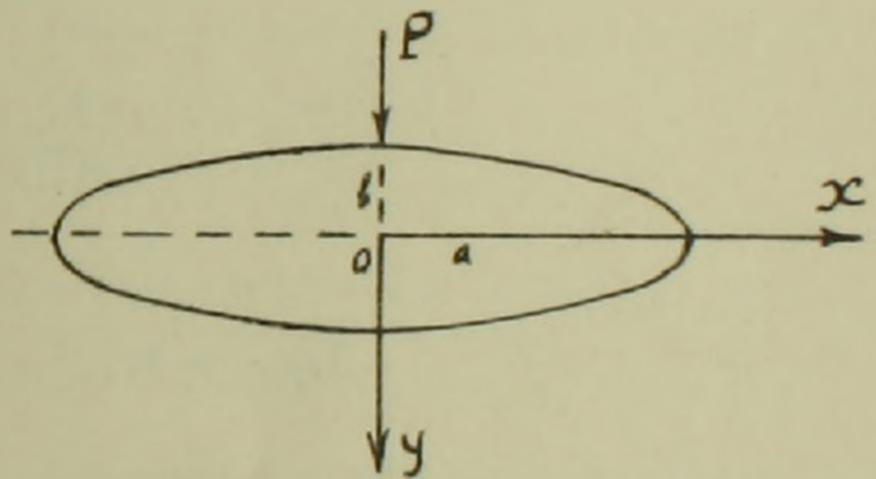
2. *Стержень эллиптического сечения.* Пусть контур поперечного сечения (фиг. 1) задан уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0. \quad (2.1)$$

Так как поперечное сечение представляет собой узкую длинную область, то отношение полуосей эллипса

$$\lambda = \frac{b}{a} \quad (0 < \lambda < 1)$$

естественно будет малым параметром. Тогда уравнение эллипса (2.1) можно записать так:



Фиг. 1.

$$y = \pm \lambda f(x), \quad \text{где } f^2(x) = a^2 - x^2. \quad (2.2)$$

Легко видеть, что здесь можно положить  $\vartheta = 0$ .

Учитывая (2.2), из рекуррентных уравнений (1.11) при помощи (1.10) определяются  $Q_k(x, \eta)$  ( $k = -1, 0, 1, 2, \dots$ ), так

$$Q_{2n-1} = \frac{K_{2n-1} \cdot x (\eta^2 - f^2)}{2} \quad (2.3)$$

$$(n = 0, 1, 2, \dots)$$

$$Q_{2n} = \frac{K_{2n} \cdot \eta (\eta^2 - f^2)}{6}, \quad (2.4)$$

где

$$K_{-1} = -\frac{2a_{13}}{a_{55}}, \quad K_0 = -\frac{a_{36} + a_{45}}{a_{55}} + \frac{2a_{45}}{a_{55}} \cdot K_{-1},$$

$$K_1 = \frac{2a_{45}}{3a_{55}} \cdot K_0 - \frac{3a_{44}}{a_{55}} \cdot K_{-1} + \frac{a_{44}}{a_{55}}, \quad (2.5)$$

$$K_{2n+1} = \frac{2a_{45}}{3a_{55}} \cdot K_{2n} - \frac{3a_{44}}{a_{55}} \cdot K_{2n-1} \quad (2.6)$$

(n = 1, 2, 3, ...)

$$K_{2n} = \frac{2a_{45}}{a_{55}} \cdot K_{2n-1} - \frac{a_{44}}{3a_{55}} \cdot K_{2n-2} \quad (2.7)$$

Из соотношений (1.9), (2.3) и (2.4) находим

$$\begin{aligned} \Phi(x, \eta; \lambda) = & \frac{(\eta^2 - f^2)}{2} \cdot \left\{ x \cdot \left[ \frac{K_{-1}}{\lambda} + \lambda K_1 + \sum_{n=1, 2, \dots}^{\infty} \lambda^{2n+1} \cdot K_{2n+1} \right] + \right. \\ & \left. + \frac{\eta}{3} \cdot \left[ K_0 + \sum_{n=1, 2, \dots}^{\infty} \lambda^{2n} K_{2n} \right] \right\}. \quad (2.8) \end{aligned}$$

Вычислим ряды, входящие в выражения  $\Phi(x, \eta; \lambda)$ . Для этого, учитывая соотношение (2.6), напомним первый ряд в таком виде

$$\begin{aligned} \sum_{n=1, 2, \dots}^{\infty} \lambda^{2n+1} \cdot K_{2n+1} = & \frac{2a_{45}\lambda}{3a_{55}} \sum_{n=1, 2, \dots}^{\infty} \lambda^{2n} K_{2n} - \frac{3a_{44}}{a_{55}} \times \\ & \times \left\{ \lambda^3 K_1 + \lambda^2 \cdot \sum_{n=1, 2, \dots}^{\infty} \lambda^{2n+1} \cdot K_{2n+1} \right\}, \end{aligned}$$

откуда

$$\sum_{n=1, 2, \dots}^{\infty} \lambda^{2n+1} \cdot K_{2n+1} = \frac{2a_{45}\lambda}{3(a_{55} + 3a_{44}\lambda^2)} \cdot \sum_{n=1, 2, \dots}^{\infty} \lambda^{2n} K_{2n} - \frac{3a_{44}\lambda^3 K_1}{a_{55} + 3a_{44}\lambda^2}. \quad (2.9)$$

Имея в виду (2.7), аналогично получим

$$\begin{aligned} \sum_{n=1, 2, \dots}^{\infty} \lambda^{2n} K_{2n} = & \frac{6a_{45}\lambda^2 K_1}{3a_{55} + a_{44}\lambda^2} - \frac{a_{44}\lambda^2 K_0}{3a_{55} + a_{44}\lambda^2} + \\ & + \frac{6a_{45}\lambda}{3a_{55} + a_{44}\lambda^2} \cdot \sum_{n=1, 2, \dots}^{\infty} \lambda^{2n+1} \cdot K_{2n+1}. \quad (2.10) \end{aligned}$$

Из (2.9) и (2.10) определяются

$$\sum_{n=1, 2, \dots}^{\infty} \lambda^{2n+1} K_{2n+1} = \frac{3[a_{45}^2 - 3a_{44}(3a_{55} + a_{44}\lambda^2)] \cdot K_1 - 2a_{45}a_{44}K_0}{3[(a_{55} + 3a_{44}\lambda^2)(3a_{55} + a_{44}\lambda^2) - 4a_{45}^2\lambda^2]} \cdot \lambda^3 \quad (2.11)$$

$$\sum_{n=1, 2, \dots}^{\infty} \lambda^{2n} K_{2n} = \frac{6a_{45}a_{55} \cdot K_1 - a_{44}(a_{55} + 3a_{44}\lambda^2) \cdot K_0}{(a_{55} + 3a_{44}\lambda^2)(3a_{55} + a_{44}\lambda^2) - 4a_{45}^2\lambda^2} \cdot \lambda^2. \quad (2.12)$$

Подставляя из (2.11) и (2.12) значения рядов в (2.8), учитывая (2.5), после несложных действий находим

$$\Phi = \frac{\tau_1^2 - f^2}{2\lambda} \left\{ x \cdot \frac{(a_{44}\lambda^2 - 2a_{13})(3a_{55} + a_{44}\lambda^2) - 2\lambda^2 a_{45}(a_{36} + a_{45})}{(a_{55} + 3a_{44}\lambda^2)(3a_{55} + a_{44}\lambda^2) - 4a_{45}^2\lambda^2} + \right. \\ \left. + \lambda\tau_1 \cdot \frac{2a_{45}(a_{44}\lambda^2 - 2a_{13}) - (a_{36} + a_{45})(3a_{44}\lambda^2 + a_{55})}{(a_{55} + 3a_{44}\lambda^2)(3a_{55} + a_{44}\lambda^2) - 4a_{45}^2\lambda^2} \right\}$$

или при помощи (1.6) и учитывая, что  $l = \frac{\pi ab^3}{4}$ ,

$$\Psi(x, y) = \frac{2P \cdot |y^2 - \lambda^2(a^2 - x^2)|}{\pi ab^3 [(a_{55} + 3a_{44}\lambda^2)(3a_{55} + a_{44}\lambda^2) - 4a_{45}^2\lambda^2]} \times \\ \times |x \cdot [(a_{44}\lambda^2 - 2a_{13})(3a_{55} + a_{44}\lambda^2) - 2\lambda^2(a_{36} + a_{45})a_{45}] + \\ + y \cdot [2a_{45}(a_{44}\lambda^2 - 2a_{13}) - (a_{36} + a_{45})(3a_{44}\lambda^2 + a_{55})]|, \quad (2.13)$$

которое точно совпадает с результатом, полученным иным путем проф. С. Г. Лехницким (1,5).

При помощи (2.13) и (1.2) для компонент напряжений получаются следующие компактные выражения

$$\tau_{xz} = \frac{2P}{\pi ab^3 [(a_{55} + 3a_{44}\lambda^2)(3a_{55} + a_{44}\lambda^2) - 4a_{45}^2\lambda^2]} \times \\ \times \{ 2xy \cdot [(a_{44}\lambda^2 - 2a_{13})(3a_{55} + a_{44}\lambda^2) - 2\lambda^2 a_{45}(a_{36} + a_{45})] + \\ + [3y^2 - \lambda^2(a^2 - x^2)] \cdot [2a_{45}(a_{44}\lambda^2 - 2a_{13}) - (a_{36} + a_{45})(3a_{44}\lambda^2 + a_{55})] \}, \\ \tau_{yz} = - \frac{2P}{\pi ab^3 [(a_{55} + 3a_{44}\lambda^2)(3a_{55} + a_{44}\lambda^2) - 4a_{45}^2\lambda^2]} \times \\ \times \{ 2xy\lambda^2 \cdot [2a_{45}(a_{44}\lambda^2 - 2a_{13}) - (a_{36} + a_{45})(3a_{44}\lambda^2 + a_{55})] + \\ + [y^2 + \lambda^2(3x^2 - a^2)] \cdot [(a_{44}\lambda^2 - 2a_{13})(3a_{55} + a_{44}\lambda^2) - \\ - 2\lambda^2 a_{45}(a_{36} + a_{45})] - [y^2 - \lambda^2(a^2 - x^2)] \}. \quad (2.14)$$

3. Изгиб анизотропного стержня (фиг. 2) с удлиненным трапециодальным поперечным сечением. Уравнения линий АВ и CD можно записать так

$$y = \pm \left[ \frac{d_2 - d_1}{2b} \cdot x + \frac{1}{2b} \cdot (d_1 b_2 + d_2 b_1) \right],$$

или, учитывая, что начало координат совпадает с центром тяжести,

$$y = \pm \frac{d_2}{b} \cdot \left[ \frac{d_2 - d_1}{2d_2} \cdot x + \frac{b(d_1^2 + d_1 d_2 + d_2^2)}{3d_2(d_1 + d_2)} \right], \quad (3.1)$$

где

$$b_1 = \frac{b(2d_2 + d_1)}{3(d_1 + d_2)}, \quad b_2 = \frac{b(2d_1 + d_2)}{3(d_1 + d_2)}.$$

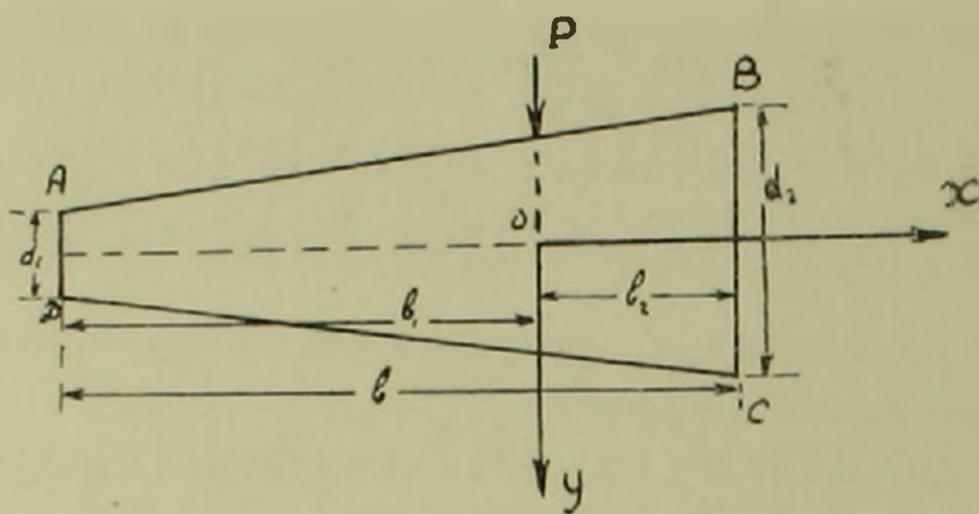
Так как рассматриваются удлиненные профили, то отношение  $\frac{d_2}{b}$  является малой величиной  $\left(0 < \frac{d_2}{b} < 1\right)$ .

Введя обозначения

$$\lambda = \frac{d_2}{b}, \quad a = \frac{d_2 - d_1}{b}, \quad c = \frac{b(d_1^2 + d_1 d_2 + d_2^2)}{3d_2(d_1 + d_2)},$$

уравнения (3.1) можно представить так

$$y^2 - \lambda^2 f^2(x) = 0, \quad \text{где } f^2(x) = (ax + c)^2 \quad (3.2)$$



Фиг. 2.

Для исследуемого случая из (1.11) при помощи (1.10) и (3.2) получаются

$$Q_{2n-1}(x, \eta) = \frac{\eta^2 - f^2}{2} \cdot [K_{2n-1} \cdot x + B_{2n-1}] \quad (3.3)$$

$(n = 0, 1, 2, \dots)$

$$Q_{2n}(x, \eta) = \frac{\eta^2 - f^2}{2} \cdot \left[ \frac{K_{2n}}{3} \cdot \eta + R_{2n} \right], \quad (3.4)$$

где

$$B_{-1} = R_0 = 0, \quad K_{-1} = -\frac{2a_{13}}{a_{55}}, \quad K_0 = -\frac{a_{36} + a_{45}}{a_{55}} + \frac{2a_{45}}{a_{55}} \cdot K_{-1},$$

$$K_1 = \frac{3a_{44}a^2}{a_{55}} \cdot K_{-1} - \frac{2a_{45}a^2}{3a_{55}} \cdot K_0 - \frac{a_{44}a^2}{a_{55}},$$

$$B_1 = \frac{2a_{45}ac}{a_{55}} \cdot K_{-1} - \frac{2a_{45}ac}{3a_{55}} \cdot K_0 - \frac{a_{44}ac}{a_{55}}, \quad R_2 = -\frac{2\Theta}{a_{55}}, \quad (3.5)$$

$$K_{2n} = \frac{2a_{45}}{a_{55}} \cdot K_{2n-1} + \frac{a_{44}a^2}{3a_{55}} \cdot K_{2n-2} \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (3.6)$$

$$K_{2n+1} = -\frac{2a_{45}a^2}{3a_{55}} \cdot K_{2n} + \frac{3a_{44}a^2}{a_{55}} \cdot K_{2n-1} \quad (3.7)$$

$$R_{2n} = \frac{a_{44}a^2}{a_{55}} \cdot R_{2n-2} \quad (n = 2, 3, \dots) \quad (3.8)$$

$$B_{2n+1} = -\frac{2a_{45}ac}{3a_{55}} \cdot K_{2n} + \frac{2a_{44}ac}{a_{55}} \cdot K_{2n-1} + \frac{a_{44}a^2}{a_{55}} \cdot B_{2n-1} \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (3.9)$$

Подставляя значения  $Q_{2n-1}$  и  $Q_{2n}$  в (1.9), получим

$$\begin{aligned} \Phi(x, \eta; \lambda) = & \frac{\eta^2 - J^2}{2} \cdot \left\{ \left[ -\frac{K_{-1}}{\lambda} + \lambda K_1 + \sum_{n=1, 2}^{\infty} \lambda^{2n+1} \cdot K_{2n+1} \right] \times \right. \\ & \times x + \frac{\eta}{3} \cdot \left[ K_0 + \sum_{n=1, 2}^{\infty} \lambda^{2n} K_{2n} \right] + \left[ B_1 \lambda + \sum_{n=1, 2}^{\infty} \lambda^{2n+1} \cdot B_{2n+1} \right] + \\ & \left. + \left[ R_2 \lambda^2 + \sum_{n=2, 3}^{\infty} \lambda^{2n} R_{2n} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Вычислим эти ряды.

Первый ряд, имея в виду (3.7), запишем так

$$\begin{aligned} \sum_{n=1, 2}^{\infty} \lambda^{2n+1} \cdot K_{2n+1} = & -\frac{2a_{45}a^2\lambda}{3a_{55}} \cdot \sum_{n=1, 2}^{\infty} \lambda^{2n} K_{2n} + \frac{3a_{44}a^2\lambda^2}{a_{55}} \times \\ & \times \left[ \lambda K_1 + \sum_{n=1, 2}^{\infty} \lambda^{2n+1} \cdot K_{2n+1} \right], \end{aligned}$$

откуда

$$\sum_{n=1, 2}^{\infty} \lambda^{2n+1} \cdot K_{2n+1} = \frac{3a_{44}a^2\lambda^3 K_1}{a_{55} - 3a_{44}a^2\lambda^2} - \frac{2a_{45}a^2\lambda}{3(a_{55} - 3a_{44}a^2\lambda^2)} \cdot \sum_{n=1, 2}^{\infty} \lambda^{2n} \cdot K_{2n}. \quad (3.11)$$

Таким же способом, учитывая (3.6), находим

$$\begin{aligned} \sum_{n=1, 2}^{\infty} \lambda^{2n} K_{2n} = & \frac{6a_{45}\lambda^2 K_1}{3a_{55} - a_{44}a^2\lambda^2} + \frac{a_{44}a^2\lambda^2 K_0}{3a_{55} - a_{44}a^2\lambda^2} + \\ & + \frac{6a_{45}\lambda}{3a_{55} - a_{44}a^2\lambda^2} \cdot \sum_{n=1, 2}^{\infty} \lambda^{2n+1} \cdot K_{2n+1}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

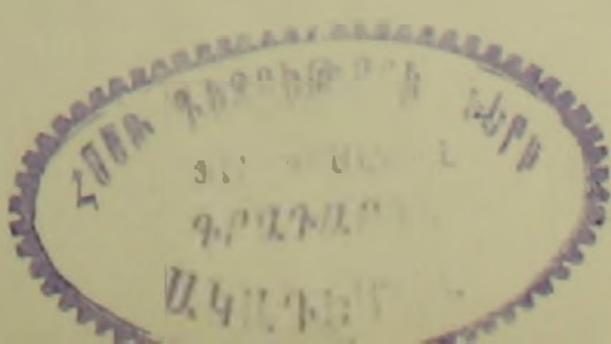
Тогда из (3.11) и (3.12) определяются

$$\sum_{n=1, 2}^{\infty} \lambda^{2n+1} \cdot K_{2n+1} = \frac{3[3a_{44}(3a_{55} - a_{44}a^2\lambda^2) - 4a_{45}^2] \cdot K_1 - 2a_{45}a_{44}a^2 K_0}{3[(3a_{55} - a_{44}a^2\lambda^2)(a_{55} - 3a_{44}a^2\lambda^2) + 4a_{45}^2\lambda^2 a^2]} \cdot \lambda^3 a^2 \quad (3.13)$$

$$\sum_{n=1, 2}^{\infty} \lambda^{2n} \cdot K_{2n} = \frac{6a_{45}a_{55} \cdot K_1 + a_{44}a^2(a_{55} - 3a_{44}a^2\lambda^2) \cdot K_0}{(3a_{55} - a_{44}a^2\lambda^2)(a_{55} - 3a_{44}a^2\lambda^2) + 4a_{45}^2 a^2 \lambda^2} \cdot \lambda^2 \quad (3.14)$$

Теперь перейдем к вычислению третьего ряда. При помощи (3.9) можно написать

$$\sum_{n=1, 2}^{\infty} \lambda^{2n+1} \cdot B_{2n+1} = -\frac{2a_{45}ac\lambda}{3(a_{55} - a_{44}a^2\lambda^2)} \cdot \sum_{n=1, 2}^{\infty} \lambda^{2n} \cdot K_{2n} +$$



$$+ \frac{2a_{44}ac\lambda^2}{a_{55} - a_{44}a^2\lambda^2} \cdot \left( \lambda K_1 + \sum_{n=1, 2}^{\infty} \lambda^{2n+1} \cdot K_{2n+1} \right) + \frac{a_{44}a^2\lambda^3 B_1}{a_{55} - a_{44}a^2\lambda^2} \quad (3.15)$$

Имея в виду (3.9), (3.13) и (3.14), окончательно (3.15) будет

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1, 2}^{\infty} \lambda^{2n+1} \cdot B_{2n+1} = \\ & = \frac{2ac\lambda^3}{3(a_{55} - a_{44}a^2\lambda^2) [(3a_{55} - a_{44}a^2\lambda^2)(a_{55} - 3a_{44}a^2\lambda^2) + 4a_{45}^2\lambda^2a^2]} \times \\ & \quad \times [ -6a_{45}^2a_{55} + 3a_{44}a_{55}(3a_{55} - a_{44}a^2\lambda^2) ] \times \\ & \quad \times \{ K_1 - a_{44}a_{45}a^2(a_{55} - a_{44}a^2\lambda^2) \cdot K_0 \} + \frac{a_{44}a^2\lambda^3 B_1}{a_{55} - a_{44}a^2\lambda^2}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Наконец, внося значение  $R_{2n}$  из (3.8) в выражение последнего ряда (3.10), после некоторых нетрудных преобразований устанавливаем

$$\sum_{n=2, 3}^{\infty} \lambda^{2n} R_{2n} = \frac{a_{44}a^2\lambda^4 R_2}{a_{55} - a_{44}a^2\lambda^2}, \quad \text{если } \lambda^2 < \frac{1}{a^2} \cdot \frac{a_{55}}{a_{44}}. \quad (3.17)$$

Итак, принимая во внимание (3.12)—(3.17) и (1.6), выражение для функции напряжений окончательно можно представить в таком виде

$$\Psi(x, y) = \frac{P [y^2 - \lambda^2(ax + c)^2]}{2I} \cdot (V_1x + V_2y + V_3). \quad (3.18)$$

где

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{2a_{45}a^2\lambda^2(a_{45} + a_{36}) - (3a_{55} - a_{44}a^2\lambda^2)(2a_{13} + a_{44}a^2\lambda^2)}{(3a_{55} - a_{44}a^2\lambda^2)(a_{55} - 3a_{44}a^2\lambda^2) + 4a_{45}^2\lambda^2a^2}, \\ V_2 &= \frac{(3a_{44}a^2\lambda^2 - a_{55})(a_{45} + a_{36}) - 2a_{45}(2a_{13} + a_{44}a^2\lambda^2)}{(3a_{55} - a_{44}a^2\lambda^2)(a_{55} - 3a_{44}a^2\lambda^2) + 4a_{45}^2\lambda^2a^2}, \\ V_3 &= - \frac{2\partial I}{(a_{55} - a_{44}a^2\lambda^2) \cdot P} + \\ & + \frac{ac\lambda^2 [8a_{45}^2a_{13} + 2a_{45}(a_{36} + a_{45})(a_{55} - a_{44}a^2\lambda^2) -}{(a_{55} - a_{44}a^2\lambda^2) [(3a_{55} - a_{44}a^2\lambda^2)(a_{55} - 3a_{44}a^2\lambda^2) + 4a_{45}^2\lambda^2a^2]} \\ & \quad - a_{44} [3a_{55} - a_{44}a^2\lambda^2)(a_{55} - 4a_{13} - a_{44}a^2\lambda^2)]}{(a_{55} - a_{44}a^2\lambda^2) [(3a_{55} - a_{44}a^2\lambda^2)(a_{55} - 3a_{44}a^2\lambda^2) + 4a_{45}^2\lambda^2a^2]}, \end{aligned}$$

$$I = \frac{\lambda^3}{6} \cdot [a^3(b_2^4 - b_1^4) + 4a^2c(b_2^3 + b_1^3) + 6ac^2(b_2^2 - b_1^2) + 4c^3(b_2 + b_1)].$$

Как известно, если сила  $P$  приложена в центре тяжести  $o$ , то величина  $\partial$  будет равна нулю, когда ось  $y$  также является осью симметрии, в противном случае  $\partial$  определится из уравнения\*

\* Ввиду громоздкости выражения для  $\partial$ , здесь мы его не приводим.

$$\int_{-b_1}^{b_2} \int_{-\lambda f}^{\lambda f} (\tau_{yz}x - \tau_{xz}y) dx dy = 0.$$

Для компонент напряжений получаются следующие выражения

$$\tau_{xz} = \frac{\rho}{2I} \cdot \{ |3y^2 - \lambda^2(ax+c)^2| \cdot V_2 + 2y \cdot (V_1x + V_3) \}, \quad (3.19)$$

$$\tau_{yz} = -\frac{\rho}{2I} \cdot \{ (V_1 - 1) \cdot [y^2 + \lambda^2(ax+c)^2] - 2\lambda^2a(ax+c) \times \\ \times (V_1x + V_2y + V_3) \}. \quad (3.20)$$

Хорошо известно, что закручивания не будет, если точка приложения силы совпадает с центром изгиба. В этом случае в выражениях (3.18)–(3.20) надо положить  $\vartheta = 0$ . Тогда координата  $\bar{x}$  центра изгиба определяется по известной формуле

$$\bar{x} = -\frac{2}{\rho} \cdot \int_{-b_1}^{b_2} \int_{-\lambda f}^{\lambda f} \Psi dx dy - \frac{1}{2I} \int_{-b_1}^{b_2} \int_{-\lambda f}^{\lambda f} [y^2 - \lambda^2 f^2(x)] x dx dy.$$

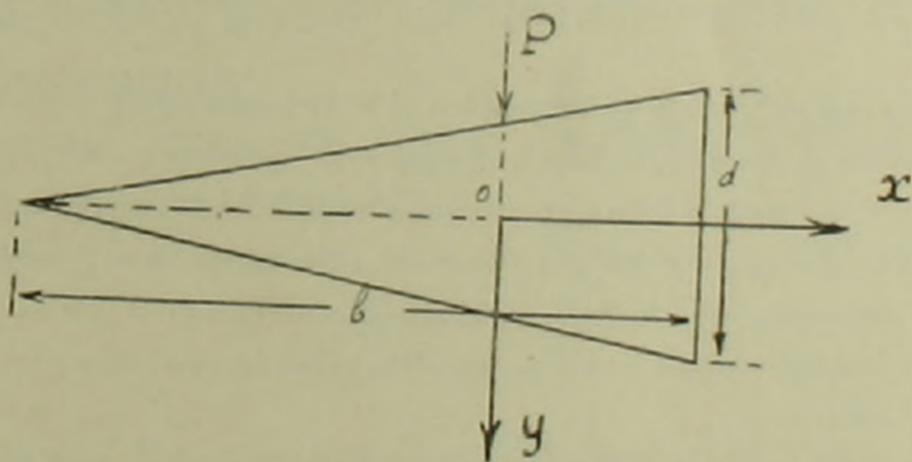
Подставляя значение функции напряжений из (3.18), интегрируя и делая ряд громоздких преобразований, получим

$$\bar{x} = 2V_3^* \cdot b + \frac{2V_1 + 1}{5} \times \\ \times \frac{4a^3(b_2^5 + b_1^5) + 15a^2c(b_2^4 - b_1^4) + 20ac^2(b_2^3 + b_1^3) + 10c^3(b_2^2 - b_1^2)}{a^3(b_2^4 - b_1^4) + 4a^2c(b_2^3 + b_1^3) + 6ac^2(b_2^2 - b_1^2) + 4c^3(b_2 + b_1)}, \quad (3.21)$$

где

$$V_3^*|_{\vartheta=0} = V_3^* b.$$

4. Изгиб стержня треугольного сечения (фиг. 3). Настоящая задача является частным случаем предыдущей, т. е.  $d_1 = 0$ ,  $d_2 = d$ .



Фиг. 3.

будем иметь

$$\lambda = \frac{d}{b}, \quad a = \frac{1}{2}, \quad b_1 = \frac{2b}{3}, \quad b_2 = c = \frac{b}{3}, \quad I = \frac{d^3 b}{48}. \quad (4.1)$$

Учитывая (4.1), из (3.18)–(3.21) находим

$$\Psi(x, y) = \frac{24 \cdot P \left[ y^2 - \lambda^2 \left( \frac{x}{2} + \frac{b}{3} \right)^2 \right]}{d^3 b} \cdot (V_1 x + V_2 y + V_3),$$

$$\tau_{xz} = \frac{24 \cdot P}{d^3 b} \cdot \left\{ \left[ 3y^2 - \lambda^2 \left( \frac{x}{2} + \frac{b}{3} \right)^2 \right] \cdot V_2 + 2y (V_1 x + V_3) \right\},$$

$$\tau_{yz} = -\frac{24 \cdot P}{d^3 b} \cdot \left\{ (V_1 - 1) \cdot \left[ y^2 + \lambda^2 \left( \frac{x}{2} + \frac{b}{3} \right)^2 \right] - \lambda^2 \left( \frac{x}{2} + \frac{b}{3} \right) \cdot (V_1 x + V_2 y + V_3) \right\},$$

$$\bar{x} = \left[ 2V_3 + \frac{4b^3(2V_1 + 1)}{5d^3} \right] \cdot b.$$

Пользуясь случаем, выражаю искреннюю благодарность своему научному руководителю академику АН АрмССР Н. Х. Арутюняну за постановку задачи и за руководство.

Ереванский государственный университет.

#### Վ. Ս. ՍԱՐԳՍՅԱՆ

### Երկարացված պրոֆիլներով անիզոտրոպ ձողերի ծուման մի բանի խեղիւրների մասին

Հայտնի է <sup>(1)</sup>, որ անիզոտրոպ (ոչ օրթոտրոպ) պրիզմայաձև ձողերի ուղղման է ծուման խեղիւրները բերվում են մասնական ածանցյալներով երկրորդ կարգի շանջատվող փոփոխականներով դիֆերենցիալ հավասարման ինտեգրմանը համապատասխան եզրային պայմաններով:

Այդ հավասարման լուծումը փոքր պարամետրի մեթոդի օգնութեամբ տրված է (2, 3, 4) - աշխատանքներում:

Առաջին անգամ էլիպտական կտրվածքով անիզոտրոպ ձողի ծուման խեղիւրը այլ մեթոդով լուծված է Ս. Գ. Լեխնիցկու կողմից <sup>(1, 5)</sup>: Երկարացված սիմետրիկ պրոֆիլներով անիզոտրոպ պրիզմայաձև ձողերի ծուման խեղիւրի լուծումը տրված է <sup>(2)</sup> աշխատանքում:

Ներկա աշխատութեան մեջ դիտարկված են երկարացված պրոֆիլներով անիզոտրոպ էլիպտական, սեղանաձև և եռանկյունաձև կտրվածք ունեցող ձողերի ծուման խեղիւրները Օպտվելով (2, 3, 4) - ում տրված մեթոդից լուծումները ներկայացված են շարքերով՝ ըստ փոքր և պարամետրի: Ստացված են մասնական ածանցյալներով սեկուրենտ դիֆերենցիալ հավասարումներ համապատասխան եզրային պայմաններով, որոնք ինտեգրված են երկարացված տեսքի էլիպտական սեղանաձև և եռանկյունաձև կոնտուրներով սահմանափակված տիրույթների համար:

Նշված կտրվածքներով ոչ օրթոտրոպ ձողերի ծուման մասնակ առաջացած լուծումների, ծուման կենտրոնի համար ստացված են վերջավոր տեսքով բանաձևեր:

#### ЛИТЕРАТУРА — Գ Ր Ա Կ Ա Ն Ո Ւ Թ Յ Ո Ւ Ն

- <sup>1</sup> С. Г. Лехницкий, Теория упругости анизотропного тела. Гос. изд. технико-теоретич. лит. М.—Л., 1950. <sup>2</sup> В. С. Саркисян, Известия АН АрмССР (серия физ.-мат. наук), т. XII, № 2 (1959). <sup>3</sup> В. С. Саркисян, Известия АН АрмССР (серия физ.-мат. наук), т. XIV, № 2 (1961). <sup>4</sup> В. С. Саркисян, Известия АН АрмССР (серия физ.-мат. наук) (находится в печати). <sup>5</sup> С. Г. Лехницкий, О равновесии анизотропной солевой балки. Прикладная математика и механика, т. VI, вып. I, 1942.